

환상격자 필터를 이용한 ARMA 스펙트럼 추정에 관한 연구

장 영 수 이 철 희* 정 찬 수** 양 흥 석*

* 서울대 전기과

** 숭실대 전기과

Study on ARMA Spectrum Estimation using Circular Lattice Filter

Chang Young-soo* Lee Chul-heui* Chung Chan-soo** Yang Heung-suk*

* Dept. of Electrical Eng. Seoul National Univ. ** Dept. of Electrical Eng. Soongsil Univ.

ABSTRACT

In this paper, a new ARMA spectrum estimation algorithm based on Circular Lattice filter is presented.

Since ARMA model is used in signal modeling, high-resolution spectrum can be obtained. And the computational burden is reduced by using Circular Lattice filter. By modifying the input estimation part of other proposed methods, we can get high-resolution spectrum with less computation and less memory compared with other Lattice methods.

Some computer simulations are performed.

I. 서 론

스펙트럼에 의한 신호분석은 통계학, 음성 및 영상신호처리, 유전탐사, 지진해석 그리고 시스템이론 등에 광범위하게 응용되고 있다. 따라서 주어진 데이터로부터 스펙트럼을 추정하는 문제가 컴퓨터의 발달과 함께 활발히 연구되어 왔는데, 최근의 연구동향은 보다 높은 해상도의 스펙트럼을 얻기 위해 ARMA 모델을 이용한 계수적 방법(parametric method)이 주류를 이루고 있다. 또한 계수 추정방식으로는 수리적으로 좋은 특성을 가지고 하드웨어 구성에도 유리한 격자(lattice) 형태의 알고리즘이 많이 사용되고 있다.

ARMA 스펙트럼을 추정하는 기법으로 ARMA 모델을 두 채널 AR 모델로 변환시켜 부트 스트래핑을 사용하여 Lattice filter로 계수 찾는 방법[8]이 발표되었는데 이는 다중 시계열(multiple time

series)을 이용하기 때문에 복잡한 행렬연산을 행하여야 한다는 단점이 있다.

최근에는 격자 필터 대신 환상격자(Circular Lattice) 필터를 사용한 방법[4,6]이 제시되었는데, 다변 회귀 프로세스(multivariate autoregression process)와 스칼라 주기회귀 프로세스(scalar periodic autoregression process)와의 일대일 대응관계[2,3]에 기인해서 환상격자 필터가 고안되었기 때문에 일반적 격자 필터를 이용했을 때 생기는 행렬연산은 환상 격자 필터를 사용하면 스칼라 연산만으로 대처될 수 있다[4]. 고해상도의 ARMA 스펙트럼을 얻으려면 가상입력(hypothetical input)을 정확히 추정해야 하는데 그 방법으로는 일반적인 부트스트래핑(bootstrapping) 기법과 에스컬레이터(escalator) 추정 기법[5] 등이 있으나 계산량이 늘어나게 되는 문제점이 있다. 따라서 가상입력 추정 부분의 개선 및 환상 격자 필터를 개량함으로써 보다 빠르고 보다 정확하게 신호의 스펙트럼을 구하는 알고리즘을 찾을 수 있다. 본 논문에는 환상격자 필터 이론 및 이를 이용한 기존 스펙트럼 추정방법을 시뮬레이션 등을 통하여 알아보고 새로운 스펙트럼 추정알고리즘을 제안한다. 2절에서는 환상격자 필터에 관해 그 내용과 특성을 간단히 알아보고, 3절에서는 새로운 가상입력 추정방법을 포함한 스펙트럼 추정 알고리즘을 제시하고 4절에서는 시뮬레이션 결과를 그리고 5절에서는 결론을 실는다.

II. 환상격자 필터(Circular Lattice Filter)

다음과 같은 관계를 갖는 두 프로세스 $X(\cdot)$, $Y(\cdot)$ 가

있다.

$$Y(j+d(t-1)) = X_j(t) \quad (1)$$

여기서 $X_j(t)$ 는 d 차원 벡터 프로세스 $X(t)$ 의 j 번째 원소이다. $Y(t)$ 의 선형예측(linear prediction)에 의한 k 번째 채널, j 번째 차수의 전향오차(forward error) 및 후향오차(backward error)는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \epsilon(j, k, t) &= Y(k+td) + \sum_{i=1}^j \alpha_{j,k}(i)Y(k+td-i) \\ \eta(j, k, t) &= Y(k+td-j) + \sum_{i=1}^j \beta_{j,k}(j+1-i)Y(k+td-i+1) \end{aligned} \quad (2)$$

$E[\epsilon(j, k, t)]$ 와 $E[\eta(j, k, t)]$ 을 최소화 하도록 $\alpha_{j,k}(i), \beta_{j,k}(i)$ 를 구하면 다음과 같은 환상 격자 필터를 얻을 수 있다.

$$\epsilon(j+1, k, t) = \epsilon(j, k, t) + \alpha_{j+1, k}(j+1)\eta(j, k-1, t)$$

$$\eta(j+1, k, t) = \eta(j, k-1, t) + \beta_{j+1, k}(j+1)\epsilon(j, k, t) \quad (3)$$

여기서

$$\begin{aligned} \alpha_{j+1, k}(j+1) &= -\frac{E\{\epsilon(j, k, t)\eta(j, k-1, t)\}}{E\{(\eta(j, k-1, t))^2\}} \\ \beta_{j+1, k}(j+1) &= -\frac{E\{\epsilon(j, k, t)\eta(j, k-1, t)\}}{E\{(\epsilon(j, k, t))^2\}} \end{aligned} \quad (4)$$

이미 식(2)에서 $\eta(j, o, t) = \eta(j, d, t-1)$ 임은 쉽게 알 수 있다.

환상 격자 필터는 복잡한 행렬연산이 전혀 없이 간단히 스칼라 연산만으로 계수를 추정하나며, 각 채널을 거의 독립적으로 계산할 수 있으므로 여러개의 프로세서를 사용할 경우 더욱 유리하다. 또한 하드웨어(hardware)로 구현할 때에도 무척 알맞은 구조를 가지고 있다.

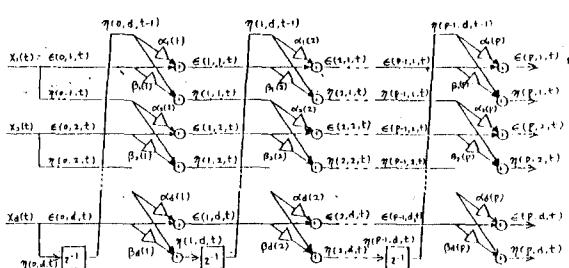


그림 1 환상 격자필터 구조

이 필터의 블록선도는 그림1과 같으며 유도과정 및 순환 형태(recursive type)의 알고리즘은 참고문헌[4, 5]에 자세히 나와 있다.

III. ARMA 스펙트럼 추정

다음과 같은 ARMA 모델에 대하여 고려해 보자.

$$\begin{aligned} y(t) &= a_1 y(t-1) + a_2 y(t-2) + \dots \\ &\quad a_n y(t-n) + u(t) + b_1 u(t-1) + \\ &\quad \dots + b_n u(t-n) \end{aligned} \quad (5)$$

u : 백색잡음

벡터 프로세스 $X(t)$ 를 아래와 같이 잡으면

$$X(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad (6)$$

(5)와 같은 ARMA 모델을 두 채널의 AR 모델로 변환할 수 있다. 이 모델에 대해서 환상 격자 필터를 적용시키면, $u(t)$ 가 백색잡음이기 때문에 다음의 결과를 얻는다.

$$\begin{aligned} E[\epsilon(j, 1, t)\eta(j, 2, t-1)] \\ = E[u(t)\eta(j, 2, t-1)] = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

$$\alpha_1(j+1) = -\frac{E\{\epsilon(j, 1, t)\eta(j, 2, t-1)\}}{E\{(\eta(j, 2, t-1))^2\}} = 0$$

$$\beta_1(j+1) = -\frac{E\{\epsilon(j, 1, t)\eta(j, 2, t-1)\}}{E\{(\epsilon(j, 1, t))^2\}} = 0 \quad (8)$$

여기서 $\alpha_k(j+1), \beta_k(j+1)$ 은 각각 $\alpha_{k, j+1}(j+1), \beta_{k, j+1}(j+1)$ 을 나타낸다.

식(7) 및 $E[y(t)u(t)] = E[u^2(t)]$ 를 이용하면

$$\begin{aligned} \alpha_2(1) &= -\frac{E\{\epsilon(o, 2, t)\eta(o, 1, t)\}}{E\{(\eta(o, 1, t))^2\}} \\ &= -\frac{E\{y(t)u(t)\}}{E\{u^2(t)\}} = -1 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\epsilon(j+1, 1, t) = \epsilon(j, 1, t) = u(t)$$

$$\eta(j+1, 1, t) = \eta(j, 2, t-1) \quad (10)$$

$j = 0, 1, \dots, 2n-1$

의 결과를 얻는다.

그런데 신호의 스펙트럼을 분석할 때는 입력 $u(t)$ 를 알고 있지 않으므로 추정에 의해 구해야 한다. 일반적으로는 부트스트래핑 기법이 많이 쓰이고 있으나 요즘은 환상격자 필터의 끝 채널의 후향오차(backward error)들이 서로 직교(orthogonal)하는 성질을 이용하여 이들의 선형 결합(linear combination)으로 가상 입력(hypothetical input)을 추정해내는 에스컬레이션(escalation) 추정기법이 제안되어 좋은 결과를 보이고 있다. 그러나 이 방법들은 계산량이 많은 편이라 실시간 추정(real-time estimation)을 위해 보다 간단하면서도 좋은 특성을 가지는 입력 추정알고리즘을 제시해 보았다. 알고리즘은 식(3), (8), (9), (11)-(19)와 같으며 계수추정부분은 변화시키지 않았기 때문에 환상격자 필터의 장점들은 모두 살릴 수 있었다.

$$\delta(j,t) = \lambda\delta(j,t-1) + \frac{(\epsilon(j,2,t))^2}{\cos^2 \theta(j)} \quad (11)$$

$$\tau(j,t) = \lambda\tau(j,t-1) + \frac{(\eta(j,1,t))^2}{\cos^2 \theta(j)} \quad (12)$$

$$\Delta(j,t) = \lambda\Delta(j,t-1) + \frac{\epsilon(j,2,t)\eta(j,1,t)}{\cos^2 \theta(j)} \quad (13)$$

$$\alpha_2(j+1) = -\frac{\Delta(j,t)}{\tau(j,t)} \quad (14)$$

$$\beta_2(j+1) = -\frac{\Delta(j,t)}{\delta(j,t)} \quad (15)$$

$$\cos^2 \theta(j+1) = \cos^2 \theta(j) - \frac{(\eta(j,1,t))^2}{\tau(j,t)} \quad (16)$$

$$\hat{U}(t) = \sum_{i=0}^n a_i y(t-i) - \sum_{i=1}^n b_i \hat{U}(t-i)$$

$$a_0 = 1, \quad j = 0, 1, \dots, n-1 \quad (17)$$

(초기조건)

$$\delta(j,0) = \tau(j,0) = \text{some small positive value}$$

$$\Delta(j,0) = 0, \quad \cos^2 \theta(0) = 1, \quad 0 < \lambda \leq 1 \quad (18)$$

$$\epsilon(0,1,t) = \eta(0,1,t) = \hat{U}(t)$$

$$\epsilon(0,2,t) = \eta(0,2,t) = y(t) \quad (19)$$

IV. 시뮬레이션

$$y(t) = 1.5y(t-1) - 0.7y(t-2) + 0.5u(t-1)$$

$$-0.3u(t-2)$$

의 모델을 이용하여 시뮬레이션을 행하였다. 그림 2는 Sakai 가 제안한 에스컬레이션 추정을 이용한 방법이며 그림 3은 본 논문에서 제안된 방법이다. 두 방법 모두 10가지 다른 샘플을 이용해 평균을 냈으며 점선은 계수의 참값을 나타낸다.

V. 결 론

본 논문에서는 환상격자필터와 새로운 입력 추정 기법을 이용하여 ARMA 스펙트럼 추정해 내는 알고리즘을 제시하였다. 이 방법은 기존의 방법보다 적은 계산량을 필요로 하며 수렴특성 안정도 해석 등에 대한 계속된 연구가 요구된다.

REFERENCES

1. Parzen, E, "An approach to time series analysis," Ann. Math. Statist. Vol.32, pp.951-989, 1961.
2. Pagano, M, "Periodic and multiple autoregressions," Ann. statist. Vol.6, pp.1310-1317, 1978.
3. Pagano, M, "Estimation of models of AR signal plus whit noise," Ann. statist. Vol.2, pp.99-108, 1974.
4. Sakai, H, "Circular lattice filtering using pagano's method," ASSP-30, pp.279-287, 1982
5. Kawase, T, et al., "Recursive least squares circular lattice and escalator estimation algorithms," ASSP-31, pp.228-231, 1983
6. Sakai, H, et al., "ARMA modeling using circular lattice filter," IFAC, Vol.10, pp.65-69, 1984
7. Friedlander, B, "Lattice implementation of some recursive parameter estimation algorithms," I.J.C. Vol.37, No.4, pp.661-684, 1983

8. Lee D.T.L. et al., "Recursive ladder algorithm
for ARMA modeling," AC-27, pp.753-764, 1982

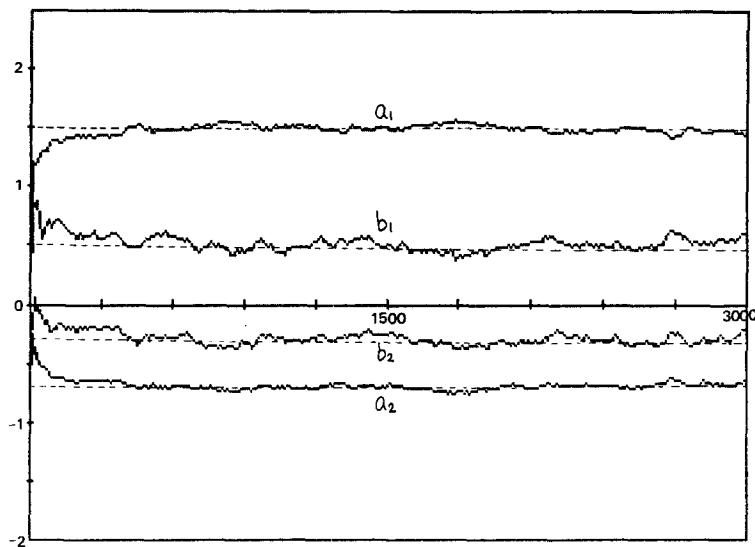


그림 2 추정된 ARMA 계수(Sakai의 방법)

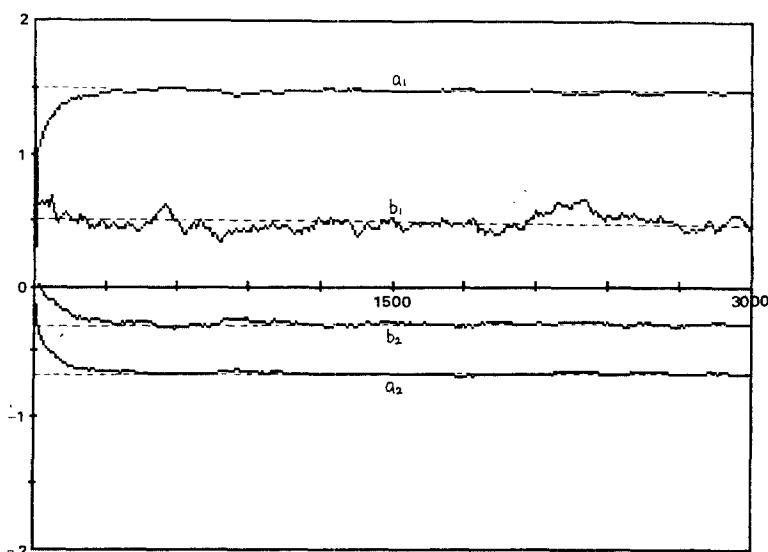


그림 3 추정된 ARMA 계수(제안된 방법)