

평탄한 통과대역과 등리플 저지대역을 갖는 선형위상 FIR 디지털  
필터의 최적설계

◦ 정 부 영, 이 영 국, 김 영 권

건국대학교 전자공학과

Optimal Design of Linear-Phase FIR Digital Filters with Flat  
Passbands and Equiripple Stopbands.

B.Y. Chung, Y.K. Lee, Y.K. Kim  
Dept of electronics, Konkuk Univ.

Abstract

We have studied a new technical approach for the design of digital FIR filters with flatness in the passband, and equiripple attenuation in the stopband using the program of J.H. McClellan, T.W.Parks, L.R.Rabiner and the flatness property.

The design technique directly leads to structures that have low passband sensitivity properties.

1. 서 론

여러 방면에 쓰이고 있는 디지털 필터의 설계시에 고려할점은 선형위상이 요구된다는 것이다. FIR 디지털 필터는 위상이 선형이기 때문에 비선형 특성에 의한 주파수 분산이 문제되는 음성처리와 데이터 전송에 유용하다. 또한 차수가 높을때는 좋은 감쇄 특성을 얻는다.

본 논문에서는 McCLELLAN - PARKS - RABINER 가 제시한 프로그램중에서 EFF 와 WATE 를 수정한 다음 이것을 하나의 부프로그램으로 만들었다. 즉 통과대역과 저지대역에서 등리플한 특성을 갖는 필터를 설계하는 프로그램과 본논문의 3절과 4절에 서술되어 있는 방법에 의하여 통과 대역에서는 상당한 평탄성을 이루고 저지대역에서는 등리플한 특성을 갖는 필터를 설계한다.

2. FIR 필터의 특성

입력신호  $x(n)$  이 단위 임펄스  $U(n)$  일때의 출력을 임펄스 응답 또한 전달함수  $H(n)$  이라 하는데  $n > N$  인 모든  $n$  에 대하여  $H(n)=0$  이 성립하는 상수  $N$  이 존재하면  $H(n)$  을 FIR 함수라하고 그렇지 않은것은 IIR 함수라고 부른다.

디지털 필터의 입력과 출력의 관계는 계산가능한 알고리즘으로 변환되며, 이 알고리즘은 기본적인 계산이나 구성성분에 의해서 설명된다.

입력과 출력관계를 설명하는 전달함수의 정의는

$$H(z) = \left( \sum_{k=0}^{M-1} b_k z^{-k} \right) / \left( 1 - \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k} \right) = Y(z) / X(z) \quad (1)$$

이 식에서 보면 IIR 필터는 계수  $a_k$  가 0이 아닌 경우이고 FIR 필터는 계수  $a_k$  가 0인 경우이다.

FIR 함수의 전달함수  $H(z)$  는 아래와 같이 FIR 함수  $h(n)$  와 차수가  $N-1$  인  $z^{-n}$  의 다항식으로 표시된다.

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} \quad (2)$$

여기에서 임펄스 응답이 선형의 조건을 만족하면  $h(n) = h(N-1-n)$  이며 FIR 필터는 선형위상을 갖는데 이것의 증명과정은 생략하기로 하겠다.

FIR 필터의 주파수 응답에 관한 결과식을 살펴보면, 표본확식  $(N-1) / 2$  의 지연에 해당하는 선형위상변이를 갖는다는 것을 알수있다.

### 3. 새로운 방식의 접근방식

필터  $H(z)$  를  $H_1(z)$  와  $H_2(z)$  로 나누어서  $H_2(z)$  를 특정한 성질을 갖게끔 미리 정하여 준다. 이  $H_2(z)$  에 알맞게 웨이브-동리를 오차에 대한 웨이링 함수  $W(w)$  와 요구치값  $D(w)$  를 새롭게 정하여 줌으로써  $H(z)$  를 설계하여 낼수가 있다. 그 결과 얻은 최종  $H(z)$  의 선형의 상변이 만큼 보상시켜줌으로써 최종 전달함수

$$G(z) \text{ 를 얻을 수가 있다. 즉 "통과대역"}$$

에서 매우 평탄한 특성을 갖고 저지대역에서 등리플한 특성"을 갖는 필터를 설계하여 낼수가 있는 것이다. 본 설계절차는 직접적으로 매우 낮은 통과대역 감도를 갖는 필터 구조를 낳는다. 따라서 필터의 구성시에 증폭기 계수의 양자화에도 불구하고 통과대역의 평탄성은 여전히 영향을 받지 아니하며 따라서 통과대역은 계속 만족할만한 특성을 갖는다. 본논문의 방식에 의한 필터의  $M$  의 값에 따른 필터 응답의 변화를 살펴본다.

본 절에서는 저역통과설계를 다룬다. 저지대역은  $\delta_2$  의 최대오차를 갖는 등리플이어야 하고 통과대역에서의 허용할수 있는 최대오차는  $\delta_1$  이라고 가정하자. 진폭응답이  $w = \pi$  에서

0 와 같고,  $w = \pi$  에서 기울기가 0 인 필터  $H(z)$  가 되게끔  $H(z)$  를 설계하고자 한다면  $H(z)$  를,  $H(z) = H_1(z)H_2(z)$  ----- (5)

로 만들어주고  $H_2(z)$  로 하여금 위의 조건을 만족하게끔  $H_2(z) = ((1+z^{-1})/2)^M$  --- (6) 으로 만들어준다. 이제 이  $H_2(z)$  의 특성을 만족하는  $H(z)$  를 설계해야 되는데 그러기 위하여서는  $H_1(z)$  를 구한다. 이때 체비셰프 등

리를 필터를 설계해내는 프로그램 (McCLELLAN-PAKS - RABINER) 을 이용하여  $H_1(z)$  를 설계하게 된다.

전체필터의 구성도는 아래 그림 1과 같다.

### 4. 세 방식에 의한 저역통과 필터설계

$0 < w < 0.3$  은 통과 대역  $0.35 < w < 0.5$  를 저지대역으로 하고 통과대역에서  $D(w) = 1 / |H_2(e^{jw})|$ ,  $W(w) = 1$  저지대역에서  $D(w) = 0, W(w) = 10$  인 요구치와 웨이링함수를 갖는 필터를  $N$  값과  $M$  값을 변화시키면서 특성을 설계하여 보았다.

이때 요구치와 웨이링함수에 관계하는 SUBROUTINE 인 EFF 와 WATE를 식  $|H_2(e^{jw})| = \cos^M \frac{w}{2}$  에 맞게끔 수정을 가한다.

### 5. COMPUTER - SIMULATION

SIMULATION 에는 VAX 11/780 과 그 주변장치를 사용하였다.  $H_2(z)$  를 정한 상태에서 전체필터 차수를 주게되면 자연히  $H_1(z)$  의 차수가 정해지게된다.

이때 요구치와 웨이링 함수에 관계하는 SUBROUTINE 인 EFF 와 WATE를 변환한 McCLELLAN-PARKS-RABINER 의 프로그램을 전체필터의 설계 프로그램안에 하나의 부 프로그램으로서 집어 넣었다. 결과는 decibel 로 나타낸  $G(z)$  를 나타내어서  $N$ 과  $M$  의 변화에 따른 영향을 살펴있으며 한편 통과대역에서의 제조건이래 기존 체비셰프 필터와 세필터의 오차를 확대하여 비교하여 보았다.

### 6. 결과 고찰

저지대역에서는 등리플이고 통과대역에서 거의 평탄한 특성을 갖는 필터를 얻을수 있었다. 얻은 결과를 분석하여 얻은 특성은 다음과 같다

- a.  $M$  이 커질수록 빨리 떨어지기 시작하여 통과대역의 이전서부터 떨어지는 경우도 있다.
- 또한  $M$  이 커질수록 저지대역에서의 상단도 떨어짐이 더욱 커진다. 이러한 이유들은  $H_2(z)$  가  $\cos^M \frac{w}{2}$  의 형태로 바꾸어 질수 있기 때문에 그에 따른 영향이라고 생각된다.

--- 그림 (2)

b.  $N$ 을 증가시키면 시킬수록 정확히 통과대역  
 안에서 떨어지는 특성을 갖는다. 이는  $N$ 의  
 값이 커질수록  $M$ 의 차수를 갖는  $H_2(z)$ 의  
 영향이 줄어들기 때문에 CHEBYSHEV FILTER  
 의 특성을 갖는  $H_1(z)$ 의 영향이 보다  
 강하게 나타나기 때문이라고 생각된다.

- 그림 3

c. 일반 CHEBYSHEV 필터와 세필터의 통  
 과대역내에서의 오차는  $H_1$ 의 차수를 40으  
 로 한 것과  $M=4$ ,  $H_1$ 의 차수를 36으로 한  
 것을 비교한 결과  $H_1$ 의 차수를 40으로  
 한 것이 더 우수하였다.

- 그림 4

필터의 차수를 갖게한 상태에서 세로이  $H_2(z)$   
 을 연결했을때 세방식에 의한 필터의 우수  
 성이 나타난다.

### 7. 결 론

기존의 CHEBYSHEV 방식으로 설계된 필터는  
 통과대역과 저지대역 모두에서 등리플한 특성을  
 갖는다. 통과대역에서의 오차가 작은 등리플한  
 CHEBYSHEV FILTER 라고 해도 큰 삽입이 들어  
 오거나 재생기가 여럿 필요한 장거리 통신의  
 경우에는 문제가 생긴다. 본 논문에서는 필터  
 를  $H_1(z)$ 와  $H_2(z)$ 로 나누어서  $H_2(z)$ 에  
 평한한 통과대역을 갖게끔 특성을 주어서 거기에  
 맞게끔  $H_1(z)$ 를 McClellan-Parks-Rabiner 의  
 프로그램을 이용하여 설계하였다.

VAX 11/780과 그 주변 장치를 이용하여서  
 SIMULATION 해본 결과 통과대역에서는 상당  
 히 평탄하고 저지 대역의 상단이 거의 같은 필터  
 를 얻을 수 있었다.

이 결과중 하나를 해 하여서 기존의 McClellan-  
 Parks-Rabiner의 프로그램을 이용한 Weighted  
 Chebyshev filter와 비교하여 보았다. 이때 의  
 차수가 같은 경우에  $H_2(z)$ 를 덧붙인 새 필터가 우  
 수한 특성을 나타내지  $H_1$ 의 차수와  $M$ 의 차수를

같은 새필터의 전체 차수가 일반 CHEBYSHEV 필터  
 의 차수와 같은 경우는 그러하지 못하였다. 그러  
 므로 원하는 필터의 특성에 맞게 각 값을 조절하  
 여 주면 될 것이다. 저지대역의 상층부를 떨어  
 뜨리는데  $N$ 을 증가시킬수도, 또는 약간의 통과  
 대역내 오차와 통과대역내에서의 정확한 차단  
 주파수에서의 이랄을 감안한 상태에서  $M$ 을 증가  
 시킬수도 있다. 이역시 각 경우에 맞게끔 선택하  
 면 유리하게 필터를 설계하여 낼수가 있을 것이다.

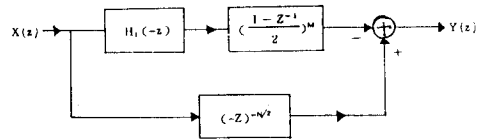
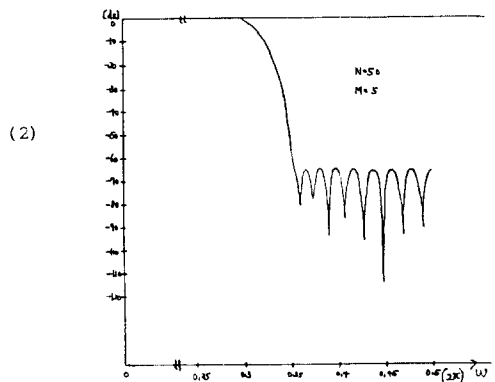
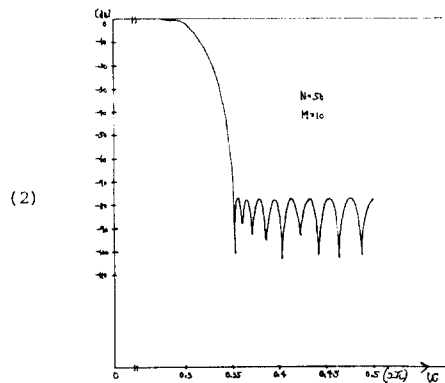


Fig 1, 전체필터의 구상도

Fig 1, Overall implementation of  $G(z)$



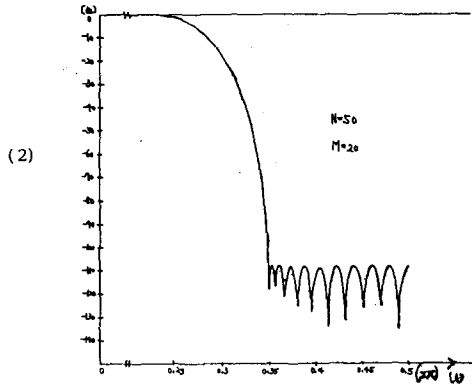


Fig2, M변화시의 필터 특성

Fig2, The characteristics of Filter depending on M

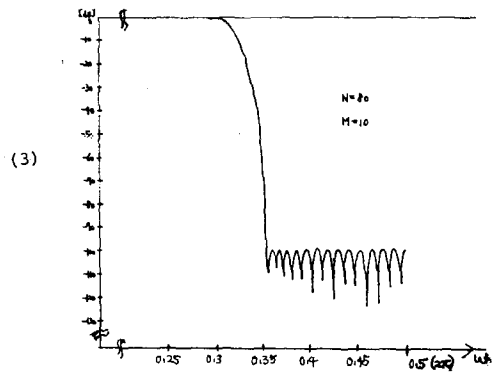
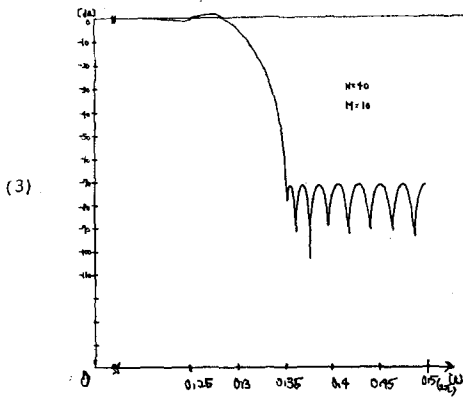


Fig 3, N변화시의 필터 특성

Fig 3, The characteristics of Filter depending on N



(3)

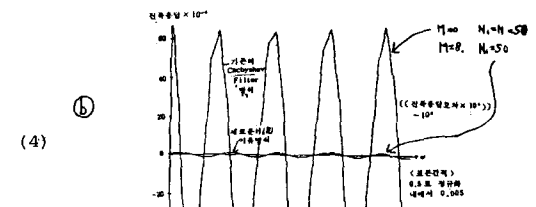
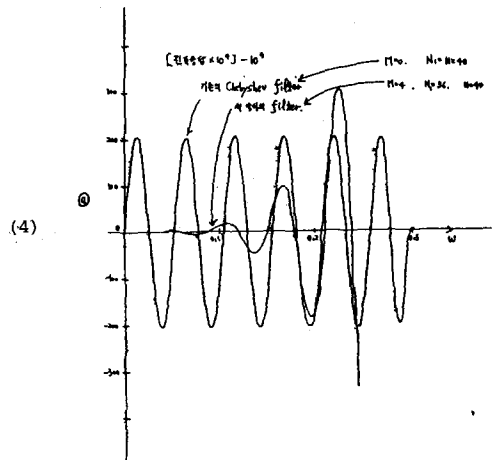
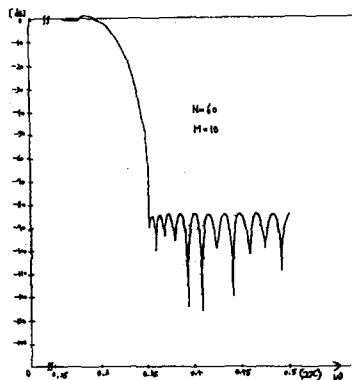


Fig 4, 체비셰프 필터와 새 필터의 통과대역내 오차

Fig 4, The passband error of the chebyshev filter and the new filter

8. 참고 문헌

- (1) P. Bowron and F.W Stephenson, Active Filters for communication and Instrumentation. McGraw-Hill 1979.
- (2) K.W. Hamming, Digital Filters, second edition Prentice-Hall 1983.
- (3) Brian, D.O. Anderson and John B. Moore, Optimal Filtering Prentice-Hall 1979.
- (4) David E. Johnson, Introduction to Filter Theory. Prentice-Hall 1976
- (5) J.H. McClellan and T.W. Parks. "A unified approach to the design of optimum FIR Linear-phase digital Filters" IEEE Trans. Circuit Theory Vol. CT-20 pp 697-701 Nov 1973
- (6) Y Neuvo. C-Y Dong and S.K. Mitra, "Interpolated finite impulse response filters" IEEE Trans. Acoust, Speech, signal processing Vol Assp-32, pp 563-570. 1984
- (7) "FIR Linear phase filter design program" in programs for Digital Signal processing, New York IEEE Press 1979 pp 5.1. 1-5. 1.13.
- (8) A. Antoniou, "New Improved Method for the Design of weighted chebyshev, Nonrecursive digital Filters" IEEE Trans, Circuit, syst. Vol CAS-30, pp20-23, April. 1974
- (9) J.W. Adams and A.N. wilson. "A New approach to FIR digital Filters with fewer multipliers and reduced sensitivity." IEEE Trans. Circuit syst. Vol. CAS-30. pp 277-283, May 1983.
- (10) L.R. Rabiner, "Linear Programming design of FIR digital Filters" IEEE Trans. Audio. Electroacoust Vol. 20, pp 280-288, Apr. 1974.