분산 이산시간 시스템의 공정 자동화를 위한 계층적 최적제어

°김현기. 전기준
경북대학교 공과대학 전자공학과

Hierarchical Optimal Control of Decentralized Discrete-Time System for Process Automation

Hyen Kie Kim and Gi Joon Jeon
Department of Electronics, Kyung Pook National University

Abstract

This paper presents decentralized discrete-time system which is optimized by hierarchical control for process automation via the extended interaction balance method. This proposed method can control general matrix which input matrix is not block diagonalization. Also, This paper shows convergence condition of proposed method.

1. 서 론

최근에 일반 생산공장에서 생산성 향상, 효율증대, 경비절감등의 요구에 부응하여 전체시스템의 효율적 통제 및 공정 자동화의 필요성이 대두되고 있다.[1]

정유, 제철, 화학공장, 전력시스템과 같은 자동화 하려는 공정은 대부분의 경우 상호작용하는 많은 수의 규모가 작은 시스템들이 서로 유기적으로 구성되어있으므로 이러한 대규모 공정제어 시스템의 제어문제는 차수가 매우 높기 때문에 많은 계산시간과 기억용량이 요구되고 대형컴퓨터를 필요로 하므로 최적해를 구하기 어렵다.[2] 이러한 난점을 피하고 전체시스템을 효과적으로 통합제어하기 위하여 등장한 계층적 최적화(Hierarchical optimization)기법에는 상호작용 평형방법(Interaction balance method), Tamura방법, 상호작용 예측방법(Interaction prediction method)등이 있으며 이들은 대규모 시스템의 자동화에 있어서 중요한 알고리즘으로 알려져 있다.[3,4]

본 논문에서는 대규모 공정이 낮은 차수의 부공정으로 분산되어 직렬로 연결된 분산 이산시간 시스템의 공정 자동화에 상호작용 평형방법을 적용하여 시스템을 계층적으로 최적화하며 제어 행렬이 블럭 대각화(Block Diagonalization)가 되어있지 않은 경우에도 제어 가능하도록 기존의 알고리즘에 제어 입력까지 상호연결된 것으로 확장한다.[5] 제안된 방법은 가상적인 공정을 선정하여 제어 함으로써 실제 공정 자동화에서 제어 부분의 이론적인 바탕을 제공한다.[6]

또한 확장된 상호작용 평형방법을 위한 수렴조건[7]을 보이며 본 논문이 제시한 알고리즘의 타당성을 시뮬레이션을 통해 확인하였다.

2. 문제의 설정

서로 유기적으로 연결되어 있는 N_s개 부시스템의 상태방정식이 아래와 같은 대규모 선형 이산시간 시스템의 최적제어 문제를 고려하자.[8,9]

$$x_i(k+1)=A_i x_i(k)+B_i u_i(k)+z_i(k) \quad (1a)$$

$$z_i(k)=\sum_{j\neq i}^{N_s}[L_{ij}x_j(k)+M_{ij}u_j(k)] \quad (1b)$$

$$x_i(0)=x_{io} \quad (1c)$$

여기서 $i=1,2,\ldots,N_s$, N_s는 부시스템의 수이고 x_i는 n_i차원 상태벡터, u_i는 m_i차원 제어벡터, z_i는 다른 부공정에 의해 발생된 r_i차원 입력벡터이고 L, M은 적당한 차원을 가지는 상수행렬이며 $n=\sum_{i=1}^{N_s}n_i$, $m=\sum_{i=1}^{N_s}m_i$, $r=\sum_{i=1}^{N_s}r_i$이다.

그림1과 같은 많은 제조공정의 분산 공정제어 시스템에서 여러개의 부공정이 직렬로 연결되어 있어서 앞 부공정의 상태와 입력이 다음 부공정의 입력으로 되고 이때 x_i, u_i, $z_i=\begin{bmatrix}x_i\\u_i\end{bmatrix}$는 아래와 같이 정의한다.

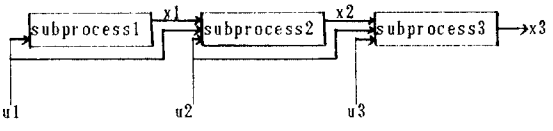


Fig.1. Decentralized process control system structure

따라서 이 모델을 공정 자동화를 위한 모델로 선정하여 각 부공정을 최적화 하기위한 성능지수를 다음과 같이 정의하자.

$$J_i=\frac{1}{2}\|x_i(k_f)\|^2_{Q_{fi}}+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{k_f-1}(\|x_i(k)\|^2_{Q_i}+\|u_i(k)\|^2_{R_i}+\|z_i(k)\|^2_{W_i}) \quad (2)$$

여기서 $\|H\|^2_C=C^THC$이고 Q_{fi}, Q_i는 상태변수들의 하중행렬로 반 양한정 행렬, R_i,W_i는 제어변수들의 하중행렬로 양한정 행렬이며 k_f는 최종시간이다.

Ns개의 부공정으로 구성된 전체시스템을 위하여 식(1)을 다시 표현하면 상태방정식은 다음과 같다.

$$x(k+1)=Ax(k)+Bu(k) \quad (3a)$$

$$x(0)=x_0 \quad (3b)$$

여기서 x는 n차 상태벡터이고 u는 m차의 제어벡터이며

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & L_{12} & \cdots & L_{1N_S} \\ L_{21} & A_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ L_{N_S1} & \cdots & & A_{N_S} \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} B_1 & M_{12} & \cdots & M_{1N_S} \\ M_{21} & B_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ M_{N_S1} & \cdots & & B_{N_S} \end{bmatrix}$$

$x^T(k)=[\,x_1(k)\ x_2(k)\ \cdots\ x_{N_S}(k)\,]$

$u^T(k)=[\,u_1(k)\ u_2(k)\ \cdots\ u_{N_S}(k)\,]$ 이다.

전체 시스템의 성능지수는 다음과 같다.

$$J=\frac{1}{2}\|x(k_f)\|^2_{Q_f}+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{k_f-1}[\,\|x(k)\|^2_Q+\|u(k)\|^2_R\,] \quad (4)$$

여기서

$Q_f=\mathrm{diag}[Q_{f1}\ \cdots\ Q_{ff}\ \cdots\ Q_{fN_S}]$

$Q=\mathrm{diag}[Q_1\ \cdots\ Q_f\ \cdots\ Q_{N_S}]$

$R=\mathrm{diag}[R_1\ \cdots\ R_i\ \cdots\ R_{N_S}]$

$W=\mathrm{diag}[W_1\ \cdots\ W_i\ \cdots\ W_{N_S}]$ 로 된다.

대규모 시스템의 최적화 문제는 식(1)을 만족하면서

$$J=\sum_{i=1}^{N_S}J_i \quad (5)$$

를 최소로 하는 제어법칙 $u_i(k)$, $i=1,2,\ldots,N_S$를 구하는 것이다. 식(2)에서 $\|z_i(k)\|_{W_i}$항은 물리적인 의미는 없지만 단지 $\frac{\partial H_i}{\partial z_i}$에서 특이해를 피하기 위해서 도입한 것이다.

3. 확장된 상호작용 평형방법에 의한 해

앞절의 그림1과 같은 분산 공정제어 시스템을 최적화 하기 위해 조정자(Coordinate)를 상위계층으로 하고 각 부공정을 하위계층으로 하여 그림2와 같은 계층적 구조로 모델링 하였다. 하위계층에서 i번째 부공정, 즉 식(1) 및 식(2)를 최적화하고 상위계층에서는 하위계층에서 구한 변수들을 식(1)과 식(5)를 최적화하는 방향으로 수정하여 다시 하위계층으로 보내는 확장된 상호작용 평형방법을 이용한다.

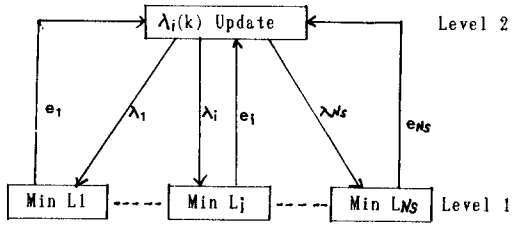


Fig.2. Two level hierarchical structure based on extended interaction balance method.

앞절의 문제를 해결하기 위하여 효율적인 두 레벨 구조로 쌍대함수(Dual Function) $\phi(\lambda)$를 다음과 같이 정의한다.

$$\phi(\lambda)=\min_{x_i,u_i,z_i}\{L(x_i,u_i,z_i,\lambda_i)\}\ ,\quad i=1,2,\ldots,Ns \quad (6)$$

여기서 Lagrangian은

$$L(x_i,u_i,z_i,\lambda_i)=\sum_{i=1}^{N_S}\{\frac{1}{2}\|x_i(k_f)\|^2_{Q_{ff}}+\sum_{k=0}^{k_f-1}[\frac{1}{2}\|x_i(k)\|^2_{Q_i}+\frac{1}{2}\|u_i(k)\|^2_{R_i}+\frac{1}{2}\|z_i(k)\|^2_{W_i}]+\lambda_i(k)^T[z_i(k)-\sum_{j\neq i}^{N_S}(L_{ij}x_j(k)+M_{ij}u_j(k))]+p_i^T(k+1)[A_ix_i(k)+B_iu_i(k)+z_i(k)-x_i(k+1)]\} \quad (7)$$

와 같으며 λ_i는 n_i차원 Lagrange multiplier 벡터이고 p_i는 n_i차원 Adjoint 벡터이다. Strong Lagrange Duality 정리[10]에 의해

$$\max_{\lambda}\phi(\lambda)=\min_{u}J\ ,\quad i=1,2,\ldots,N_S \quad (8)$$

이며 식(8)에서 Lagrangian을 다시쓰면

$$L=\sum_{i=1}^{N_S}L_i=\sum_{i=1}^{N_S}\{\frac{1}{2}\|x_i(k_f)\|^2_{Q_{ff}}+\sum_{k=0}^{k_f-1}[\frac{1}{2}\|x_i(k)\|^2_{Q_i}+\frac{1}{2}\|u_i(k)\|^2_{R_i}+\frac{1}{2}\|z_i(k)\|^2_{W_i}]+\lambda_i(k)^Tz_i(k)-\sum_{j\neq i}^{N_S}\lambda_j(k)^TL_{ji}x_i(k)-\sum_{j\neq i}^{N_S}\lambda_j(k)^TM_{ji}u_i(k)+p_i(k+1)^T[A_ix_i(k)+B_iu_i(k)+z_i(k)-x_i(k+1)]\} \quad (9)$$

이고 x,u,z 에 대해 Lagrangian L을 최소로 하기 위하여 Lagrange Multiplier를 이용하면 i번째 부시스템의 Hamiltonian 함수는 다음과 같다.

$$H_i=\frac{1}{2}[\,\|x_i(k)\|^2_{Q_i}+\|u_i(k)\|^2_{R_i}+\|z_i(k)\|^2_{W_i}\,]+\lambda_i(k)^Tz_i(k)-\sum_{j\neq i}^{N_S}\lambda_j(k)^TL_{ji}x_i(k)-\sum_{j\neq i}^{N_S}\lambda_j(k)^TM_{ji}u_i(k)+p_i^T(k+1)[A_ix_i(k)+B_iu_i(k)+z_i(k)] \quad (10)$$

$$H=\sum_{i=1}^{N_S}H_i \quad (11)$$

식(6)에서 식(2)를 최소로 하는 제어법칙은 i번째 부공정이 완전 제어가능하다고 가정하면 최적화의 필요조건은 다음과 같다.

$$\frac{\partial H_i}{\partial z_i(k)}=0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial H_i}{\partial u_i(k)}=0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial H_i}{\partial p_i(k+1)} = x_i(k+1) \tag{14}$$

$$\frac{\partial H_i}{\partial x_i(k)} = p_i(k)\ ,\quad p_i(k_f) = Q_{fi} x_i(k_f) \tag{15}$$

$\phi(\lambda)$를 최적화 하기위한 기울기(Gradient)는 식(9)로부터

$$\nabla\phi(\lambda)\Big|_{\lambda=\lambda^*} = \frac{\partial H_i}{\partial \lambda_i(k)}\ ,\quad i=1,2,\ldots,N_s \tag{16}$$

로 되고 여기서 $\nabla\phi(\lambda)$는 상호연결 관계에서 에러(Error)를 의미한다. 이상의 최적화 필요조건을 이용해서 확장된 상호작용 평형방법은 다음과 같다. 하위계층은

$$z_i(k) = -W_i^{-1}[\lambda_i(k) + p_i(k+1)] \tag{17}$$

$$u_i(k) = -R_i^{-1}\left[B_i^T p_i(k+1) - \sum_{j\neq i}^{N_s} M_{ji}^T \lambda_j(k)\right] \tag{18}$$

$$x_i(k+1) = A_i x_i(k) + B_i u_i(k) + z_i(k) \tag{19}$$

$$p_i(k) = Q_i x_i(k) + A_i^T p_i(k+1) - \sum_{j\neq i}^{N_s} L_{ji}^T \lambda_j(k) \tag{20a}$$

$$p_i(k_f) = Q_{fi} x_i(k_f) \tag{20b}$$

로 되고 상위계층에서는 조정벡터 를 반복적으로 아래와 같이 개선한다.

$$e_i(k) = z_i(k) - \sum_{j\neq i}^{N_s} [L_{ij} x_j(k) + M_{ij} u_j(k)] \tag{21}$$

$$\lambda_i^{L+1}(k) = \lambda_i^L(k) + \alpha f_i(e^L) \tag{22}$$

여기서 L은 반복지수이고, α는 step길이, $f_i(e^L)$은 Search Direction이다. $f_i(e^L)$을 구하는 알고리즘은 Steepest Ascent 방법인 경우

$$f_i(e^L) = e_i^L(k) \tag{23}$$

이고 Conjugate 기울기법인 경우

$$f_i(e^L) = d_i^L(k) \tag{24}$$

$$d_i^L(k) = e_i^L(k) + \beta_i^L d_i^{L-1}(k) \tag{25}$$

$$\beta_i^L = \frac{\sum_{k=0}^{N} e_i^{L T}(k) e_i^L(k)}{\sum_{k=0}^{N} d_i^{(L-1)T}(k) e_i^{(L-1)}(k)} \tag{26}$$

$$d_i^0(k) = e_i^0(k) \tag{27}$$

이다.

한편 서어보 메카니즘 문제인 경우에 성능지수는 다음과 같다.

$$J_i = \frac{1}{2}\| x_i(k_f) - x_i^d \|^2_{Q_{fi}} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{K-1}[\| x_i(k) - x_i^d \|^2_{Q_i} + \| u_i(k) \|^2_{R_i} + \| z_i(k) \|^2_{W_i}] \tag{28}$$

여기서 x_i^d는 상태벡터들이 따라가야 할 목표치(Desired Value)이다. 조정기에서의 필요조건과 다른점은 하위계층에서

$$x_i(k+1) = A_i x_i(k) + B_i u_i(k) + z_i(k) + d_i \tag{29}$$

$$p_i(k) = Q_i x_i(K) + A_i^T p_i(k+1) - \sum_{j\neq i}^{N_s} A_{ji}^T \lambda_j(k) - Q_i x_i^d \tag{30}$$

이고 d_i는 확정된 입력(Deterministic Input)이다.

4. 수렴 조건

식(4)의 성능지수 J는 u에 대해서 Convex이고 두번 미분 가능하므로 J를 최소로 하는 u를 구하기 위한 필요충분 조건은 $\frac{\partial J}{\partial U} = 0$ 이며 F_i와 G를

$$F_i = \frac{\partial^2 J}{\partial U_i^2}\ ,\quad G = \frac{\partial^2 J}{\partial U^2} \tag{31}$$

로 정의하고 F_i, G는 대칭행렬로 가정한다.
전체 성능지수의 기울기(Gradient)는 $J = J(u^{k+1}) - J(u^k)$로 표시되며, 즉

$$J = J(U^{k+1}) - J(U^k) < 0 \tag{32}$$

를 조사함으로써 수렴조건을 찾기로 하자. 식(32)를 만족하기 위해서는

$$F - \frac{1}{2} G > 0 \tag{33}$$

을 만족하면 된다.[7] 식(3)을 좌표변환(Mapping)하면

$$\hat{x}(k+1) = \hat{A}\hat{x}(k) + \hat{B}u(k) + z(k) \tag{34a}$$

$$z(k) = \hat{A}\hat{x}(k) + \hat{B}u(k) \tag{34b}$$

로 된다. 식(3)의 해를

$$x(k) = Vx(0) + WBu(k) \tag{35}$$

로 표시하고 식(34)를 식(4)에 대입하면 다음과 같다.

$$J = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{k}(\| Vx(0) + WBu(k) \|^2_Q + \| u(k) \|^2_R) \tag{36}$$

수렴조건과 관련있는 F와 G를 식(34) 및 식(36)로부터 각각 유도하면

$$F = \hat{B}^T \hat{W}^* \hat{Q} \hat{W} \hat{B} + \hat{R} \tag{37}$$

$$G = B^T W^* Q W B + R \tag{38}$$

로 된다. 여기서 $\hat{B}, \hat{Q}, \hat{W}^*$, W은 각각 B, Q, W^*, W의 블럭 대각요소이고 $\hat{R}$은 전체 R행렬의 대각요소이며 W^*는 W의 Adjoint Operator 이다. 수렴조건은

$$F - \frac{1}{2}G = \hat{R} + \hat{B}^T \hat{W}^* \hat{Q} \hat{W} \hat{B} - \frac{1}{2}(R + B^T W^* Q W B) > 0 \tag{39}$$

이다. 만약 $R = \hat{R}$, $Q = \hat{Q}$ 즉 성능지수에서 상호작용항이 없을때는 다음과 같다.

$$\frac{\hat{R}}{2} + [\hat{B}^T \hat{W}^* \hat{Q} \hat{W} \hat{B} - \frac{1}{2} B^T W^* Q W B] > 0 \tag{40}$$

여기서 $\frac{\hat{R}}{2}$의 값이 충분히 양한정이면 식(40)의 조건을 만족한다. 즉 상태변수들의 하중행렬 Q를 고정시키고 제어변수들의 하중행렬 $\hat{R}$의 값을 변화시키면서 수렴하는 R행렬을 찾을 수 있다.

5. 알 고 리 즘

대규모 공정 제어 시스템을 최적화 하기 위한 계층적 최적화 방법인 확장된 상호작용 평형방법으로

성능지수 J를 최소로 하는 상태변수 $x_i(k)$와 제어법칙 $u_i(k)$, $i=1,2,\ldots,N_s$를 구하기 위한 알고리즘은 다음과 같다.

1) 처음 조정순간 L=0에서 $[\lambda_i(0)\ \lambda_i(1)\ldots\lambda_i(k-1)]=0$로 하여 하위계층으로 보낸다.
2) 각 부공정에 대하여 독립적으로 x_i, u_i, z_i를 계산하여 상위계층으로 보낸다.
3) 상위계층에서 $\lambda_i(k)$를 반복적으로 개선하여 하위계층으로 보낸다.
4) $\|e_i^L(k)\|\approx 0$. 즉 에러(error)가 충분히 작을때 까지 1)-3)과정을 반복한다.
5) 최종적으로 상태변수 $x_i(k)$와 제어법칙 $u_i(k)$, $i=1,2,\ldots,N_s$를 구한다.

6. 시뮬레이션 결과 및 고찰

본 논문에서 제안한 확장된 상호작용 평형방법을 적용하여 3개의 부공정이 직렬로 연결된 분산 공정제어 시스템에 대해서 컴퓨터 시뮬레이션 하였다. 성능지수는 다음과 같다.

$$J_i=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{40}(\|x_i(k)\|^2_{Q_i}+\|u_i(k)\|^2_{R_i}+\|z_i(k)\|^2_{W_i})$$

부공정 1

$$x_1(k+1)=\begin{bmatrix}.670 & .000\\ .319 & .607\end{bmatrix}x_1(k)+\begin{bmatrix}.329 & .000\\ .075 & .787\end{bmatrix}u_1(k)$$

부공정 2

$$x_2(k+1)=\begin{bmatrix}.670 & .000\\ .319 & .607\end{bmatrix}x_2(k)+\begin{bmatrix}.329 & .010\\ .075 & .250\end{bmatrix}z_2(k)+\begin{bmatrix}.000\\ .787\end{bmatrix}u_2(k)$$

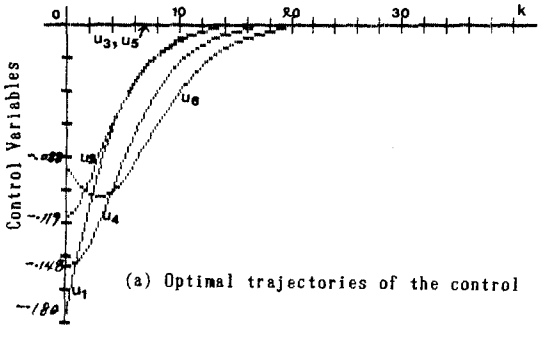
$$z_2(k)=\begin{bmatrix}x_1(k)\\ u_1(k)\end{bmatrix}$$

부공정 3

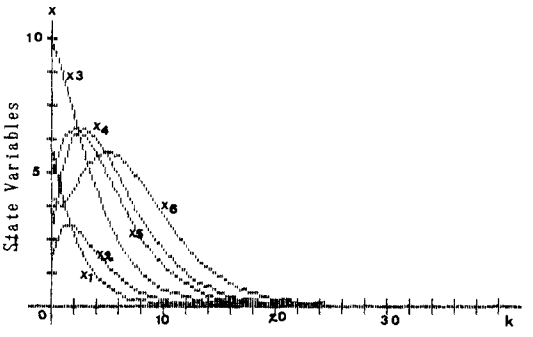
$$x_3(k+1)=\begin{bmatrix}.607 & .000\\ .319 & .607\end{bmatrix}x_3(k)+\begin{bmatrix}.329 & .000\\ .075 & .075\end{bmatrix}z_3(k)+\begin{bmatrix}.000\\ .787\end{bmatrix}u_3(k)$$

$$z_3(k)=\begin{bmatrix}x_2(k)\\ u_2(k)\end{bmatrix}$$

여기서 초기치 $x_i(0)$와 Q_i, R_i 및 W_i는 각각 $x_1(0)=[6\ \ 2]^T$, $x_2(0)=[10\ \ 5]^T$, $x_3(0)=[3\ \ 4]^T$, $Q_1=Q_2=Q_3=I_2$, $R_1=R_2=R_3=100I_2$, $W_1=W_2=W_3=1.5I_2$이며 Step길이 α는 최적값인 1.25로 설정 하였다. 본 논문에서 제안한 알고리즘을 이 예제에 적용한 결과는 그림3과 같다.



(a) Optimal trajectories of the control



(b) Optimal trajectories of the state

Fig. 3. Optimal trajectories of decentralized process control system

위 결과로 부터 제안된 알고리즘은 3절에서 예측 되었던 결과와 잘 일치됨을 알 수 있고 상위계층에서 조정벡터 λ_i의 개선은 Conjugate Gradient 방법을 이용하였다.

서로 다른 제어 하중행렬 R에서 Iteration 횟수에 따른 에러의 감소는 그림4와 같다.

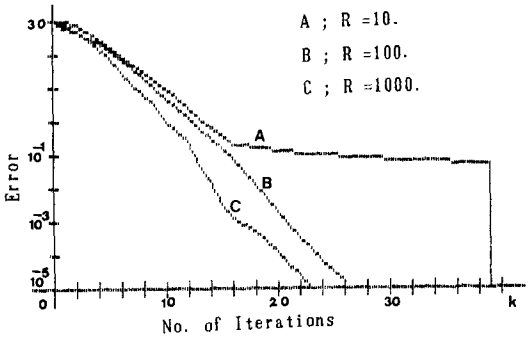


Fig. 4. Convergence of the extended interaction balance method for different R

위의 결과로 부터 제어 하중행렬 R이 충분히 양한 정이면 수렴은 보장되고 가속 됨을 알 수 있었다.

7. 결 론

본 논문에서는 공정 자동화에 이용가능한 분산 공정제어 시스템의 제어문제를 해결하기 위하여 확장된 상호작용 평형방법으로 시스템을 계층적으로 최적화 하였으며 제어 행렬이 블럭 대각화가 아닌 일반적인 경우의 시스템도 제어 가능함을 보였다. 제안된 방법은 분산 공정제어 시스템을 각 부공정에서 소형컴퓨터에 의해 계층적으로 제어 함으로써 계산시간과 기억용량을 줄일 수 있었다. 또한 본 논문의 수렴조건을 이용하여 제어 하중행렬 R의 가변을 통해 수렴성을 확인하였다. 그러나 실제 공정 모델을 대상

으로 하지 못하는 이유는 모델링 자체의 어려움 때문이며 이러한 문제는 앞으로 연구 하여야 할 과제이다.

참 고 문 헌

1. 정명진 외: 공장 자동화 특집, 대한 전자공학회지, Vol.13, No.2, 1986, April.
2. M.D. Mesarovic, D. Macko and Takahara, "Two Coordination Principles and Their Applicayion in Large Scale Systes Control", Automatica, Vol.6, pp.261-270, 1970.
3. M.G. Singh and Mohamed Hassan, "A Comparision of Two Hierarchical Optimization Methods", Int.J.Systems Sci., Vol.7, No.6, pp603-611, 1976.
4. M.G. Singh and A. Titlti: Decomposion, Optimization and Control, Pergamon Press, Oxford, 1978.
5. A.N. Hagras, Z. Binder, "Cooperative Coordination in a Decentralised System", Institut National polytechnique De Grenoble, France.
6. M.G. Singh: Dynamical Hierarchical Control, North Holland Publishing Co., Amsterdam, 1977.
7. Guy Cohen, "On an Algorithm of Decentralized Optimal Control", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 59, pp.242-259, 1977.
8. M.S. Mahmoud and M.G. Singh: Discrete Systems Analysis, Control and Optimization, Springer-verlag Berlin Heidelberg New York Tokyo, 1984.
9. Kirk: Optimal Control Theory, Prentic-Hall Inc., New Jersey, pp.184-227, 1970.
10. D. Luenberger: Optimization by Vector Space Methods, New York, Wiley, 1969.