

수직스트립으로의 고유치배치에 의한 두시간스케일
시스템에서의 선형 2차 동조기 구현

엄 태 호 김 수 중

경북대학교 공과대학 전자공학과

Linear Quadratic Regulators of Two-Time Scale Systems
with Eigenvalue Placement in a Vertical Strip

Tae Ho Um and Soo Joong Kim

Department of Electronics, Kyungpook Nat'l Univ.

Abstract

The regulator problem can be considered as some impulsive disturbance rejection one. In this point of view, the rate of decay is one of important factors for regulation and depends on how negative the real parts of the eigenvalues of closed-loop system. The algorithm that the closed-loop system has eigenvalues lying within a vertical strip is useful for rapid disturbance rejection.

This paper presents a design method for a linear quadratic regulator of two-time scale system with eigenvalues in a vertical strip by use of time-scale separation property.

1. 서 론

최적동조기를 구현하는 여러가지 방법중에서 폐회로 시스템의 고유치를 임의의 위치나 영역에 위치하도록 해주는 고유치배치 알고리즘은 제어방법이 쉽고 간편하기 때문에 오래전부터 널리 연구되어오고 있다. 일찌기 폐회로시스템에서 한개의 실수나 한쌍의 복소수 고유치를 연속적으로 이동시키는 방법이 제안^{1),2)} 되었으나, 복소수 고유치의 실수부와 허수부가 상호 종속적으로되어 둘중의 한값을 완전하게 임의로 정할수 없는 단점이 있었다. 이를 해결한 방법이 제시³⁾되었으나 계산량이 너무 많고 복잡하므로 실제로 구현하기는 어렵다.

동조기의 구현을, 임의의 시간에서의 입력부에 대한 순간적인 교란으로 볼때 폐회로시스템의 고유치를 적절한 형태의 영역에 들어가도록하면 문제를 간단하게 만들뿐아니라 계산량도 준다. 복소평면의 열린 쌍곡선 내에 고유치를 두는 방법⁴⁾ 과 복소좌반면의 수직스트립내에 위치시키는 방법⁵⁾ 등이 이에 속한다. 여기서 고유치배치 알고리즘을 두개의 시간스케일을 가진 시스템과 결합해야 하는데 전자는 부합되지 못한다. 두개의 시간 스케일을 가진 시스템을 두개의 부시스템으로 분리한 후 계산을 행함으로 제어가 쉬워진다.^{6),7),8)}

본 연구에서 동조기를 순간적인 교란의 신속한 제거란 관점에서 해석하므로 과도응답특성은 약간 희생하더라도 빠른 감쇠율을 얻기위해 충분히 복소좌반면 안쪽에 위치하는 수직스트립을 택한다.

또한 주어진 수직스트립내에 있는 고유치를 배제하거나 느린 부시스템만을 고려하여 축소된 차수의 준 최적동조기를 구현해 본다.

2. 수직스트립으로의 고유치배치 알고리즘

완전제어가능인 선형시불변 연속시간 시스템

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) ; x(0) \dots\dots\dots (1a)$$

$$y(t) = Cx(t) \dots\dots\dots (1b)$$

를 고려한다. 여기서 $x(t) \in R^n$ 은 상태벡터, $u(t) \in R^m$ 은 제어벡터, $x(0) \in R^n$ 은 상태벡터의 초기값 그리고 $y(t) \in R^p$ 는 출력벡터이다. 식(1)에 대해 최적제어 이

이론을 적용할 때의 성능지수는

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \dots\dots\dots (2)$$

로 정한다. 이때 Q는 양반정(positive semi-definite) 행렬이고, R은 양정(positive definite) 행렬이다. 식(2)의 성능지수를 최소화시키는 제어벡터를

$$u(t) = -Kx(t) = -R^{-1} B^T P x(t) \dots\dots\dots (3)$$

로 들 수 있다. 여기서 케환이득행렬 k는 리카티 방정식(Riccati equation)

$$PBR^{-1}B^TP - PA - A^TP - Q = 0 \dots\dots\dots (4)$$

의 해로 구할 수 있다. 이때 0는 적절한 차수의 영행렬이다. 결과적으로 나타나는 최적 폐회로시스템

$$\dot{x}(t) = (A - BK) x(t) \dots\dots\dots (5)$$

의 고유치 $\sigma(A - BK)$ 는 복소평면의 좌반면 안에 존재한다. 여기서 기호 σ 는 시스템의 고유치를 나타낸다.

식(2)의 성능지수를 만족하면서 식(5)의 고유치가 주어진 수직스트립안에 존재하는 알고리즘을 고찰하기에 앞서 기본이 되는 개념을 보조정리로 나타내었다.

보조정리 1 : $\lambda_i^- (i=1, 2, \dots, n^-)$ 는 식(1)의 허수축을 포함한 좌반면 고유치를 나타내고, $\lambda_i^+ (i=1, 2, \dots, n^+)$ 는 우반면 고유치를 나타낸다. 이때, 최적폐회로시스템의 고유치는

$$\sigma(A - rBR^{-1}B^TP) = \{ \lambda_i^- (i=1, 2, \dots, n^-), -\lambda_i^+ (i=1, 2, \dots, n^+) \}$$

로 쓸 수 있다. 여기서 상수이득 r은 1이며 행렬 P는 식(4)에서 Q=0일때의 해로 주어진다. 또한, $\xi_i^- (i=1, 2, \dots, n^-)$ 를 고유치 λ_i^- 에 대응하는 고유벡터로 두자. 이때 식(4)에서 Q=0의 해로 주어지는 행렬 P는

$$\begin{aligned} \text{null}(P) &= \text{span} (\xi_1^-, \xi_2^-, \dots, \xi_{n^-}^-) \\ \sigma(A - rBR^{-1}B^TP) &= \{ \lambda_i^- (i=1, 2, \dots, n^-), n^+ \text{개의 좌반면 고유치} \} \end{aligned}$$

를 만족시키며 상수이득 r은 0.5보다 큰 임의의 실수이다.

이제 수직스트립으로 고유치를 배치하는 알고리즘을 아래의 정리로 고찰한다.

정리 1 : h_1 과 h_2 는 음의 실수축위의 수직스트립 $\{-h_2, -h_1\}$ 을 정해주는 두 양의 실수값이고 $\hat{A} = A + h_1 I_n$ 으로 둔다. 두 행렬 $A^- \in R^{n \times n}$ 과 $A^+ \in R^{n \times n}$ 는

$$\begin{aligned} \sigma(\hat{A}^-) &= \{ \hat{\lambda}_i^- (i=1, 2, \dots, \hat{n}^-), \hat{n}^- \text{개의 영 고유치} \} \\ \sigma(\hat{A}^+) &= \{ \hat{\lambda}_i^+ (i=1, 2, \dots, \hat{n}^+), \hat{n}^+ \text{개의 영 고유치} \} \end{aligned}$$

로 정의한다. 식(1)의 제어벡터를

$$u(t) = -rKx(t) \dots\dots\dots (6)$$

로 들 때 케환이득 행렬 K는

$$K = R^{-1} B^T P \dots\dots\dots (7)$$

로 주어진다. 여기서 양한정행렬 P는 리카티 방정식(Riccati equation)

$$PBR^{-1}B^TP - \hat{A}^TP - P\hat{A} = 0 \dots\dots\dots (8)$$

의 해이다. 식(6)의 상수이득 r은

$$r = \frac{1}{2} + \frac{h_2 - h_1}{2 \text{tr}(\hat{A}^+)} = \frac{1}{2} + \frac{h_2 - h_1}{\text{tr}(BK)} \dots\dots\dots (9)$$

로 구하며 기호 tr은 행렬의 트레이스(trace)를 나타낸다. 식(6)의 제어벡터가 가해진 전체적인 폐회로시스템

$$\dot{x}(t) = (A - rBK) x(t) \dots\dots\dots (10)$$

의 고유치는 주어진 수직스트립안에 존재한다. 여기서 $-h_2$ 는 주어진 식(1)의 고유치보다 왼쪽에 있어야 한다.

정리 1의 계산 단계를 아래와 같이 정리할 수 있다.

단계 1 : h_1 을 결정한 뒤 식(8)에서 양한정대칭행렬 P를 식(7)에서 케환이득행렬 K를 각각 계산한다.

단계 2 : $\text{tr}(\hat{A}^+)$ 을 계산한다.

단계 3 : h_2 를 결정한 후 식(9)에서 상수이득 r, 식(6)에서 제어벡터 u(t) 그리고 식(10)에서 전체적인 최적 폐회로시스템을 얻는다. 원하는 응답특성을 얻지 못하면 h_1 과 h_2 를 변화시키면서 위의 과정을 반복한다.

3. 두개의 시간스케일을

가진 시스템으로의 적용

(1) 모델설정 및 시간스케일 분리

두개의 시간스케일을 가진 완전제어가능한 선형시불변 연속시간 시스템

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(t) \quad (11)$$

을 고려한다. 여기서 $x_1(t) \in R^{n_1}$ 은 고유치의 실수부 크기가 작은 느린 부시스템의 상태벡터, $x_2(t) \in R^{n_2}$ 는 실수부의 크기가 큰 빠른 부시스템의 상태벡터 그리고 $u(t) \in R^m$ 은 제어벡터이다.

式(11)을 느린 부시스템과 빠른 부시스템으로 분리시키는 변환행렬

$$T = \begin{bmatrix} I_1 & -ML & -M \\ & L & I_2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

를 구한다. 여기서 행렬 $L \in R^{n_2 \times n_1}$ 과 $M \in R^{n_1 \times n_2}$ 는

$$A_{21} + LA_{11} - A_{22}L - LA_{12}L = 0 \quad (13a)$$

$$(A_{11} - A_{12}L)M - M(A_{22} + LA_{12}) + A_{12} = 0 \quad (13b)$$

의 해로 주어진다.

式(12)를 이용한 분리된 시스템 $y(t) = Tx(t)$ 는

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_s & 0 \\ 0 & F_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} u(t) \quad (14)$$

로 나타난다. 여기서 각 계수행렬은

$$F_s = A_{11} - A_{12}L \quad (15a)$$

$$F_f = A_{22} + LA_{12} \quad (15b)$$

$$G_1 = (I_1 - ML)B_1 - MB_2 \quad (15c)$$

$$G_2 = LB_1 + B_2 \quad (15d)$$

이다.

(2) 수직스트립안에 고유치를 갖는 2단계 구현 방법

분리된 式(14)의 느린 부시스템과 빠른 부시스템에 대해 각각 독립적으로 최적동조기를 구성한 다음 적절이 결합하여 주어진 式(11)에 대한 최종적인 동

조기를 구현한다. 여기서는 빠른 부시스템의 제어벡터를 먼저 얻고 이를 적용하여 느린 부시스템의 제어벡터를 구한다.

느린 부시스템과 빠른 부시스템의 제어벡터를 각각 $u_s(t)$ 와 $u_f(t)$ 라 할때 복합제어벡터는

$$u(t) = u_f(t) + u_s(t) \quad (16)$$

로 쓸수 있다.

먼저 빠른 부시스템의 제어벡터를 구하기 위해 式(14)에서 빠른 부시스템만을 따로 쓰면

$$\dot{y}_2(t) = F_f y_2(t) + G_2 u_f(t) \quad (17)$$

로 된다. 정리1을 이용하여 폐회로시스템 고유치가 수직스트립 $(-h_2, -h_1)$ 안에 존재하도록 하는 제어벡터 $u_f(t)$ 를 구한다. 이때 계산 행렬은 k_f 로 둔다.

계산된 제어벡터 $u_f(t)$ 를 式(16)에 대입하여 얻은 복합제어벡터는

$$u(t) = u_f(t) + u_s(t) = [0 \quad k_f] y(t) + u_s(t) \quad (18)$$

로 나타난다. 式(18)을 式(14)에 대입하여 정리하면

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_s & G_1 k_f \\ 0 & F_f + G_2 k_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} u_s(t) \quad (19)$$

이 된다.

式(19)를 式(12)와 같은 변환행렬

$$\hat{T} = \begin{bmatrix} I_1 & -\hat{M} \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} \quad (20)$$

를 이용하여 대각화하면

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_s & 0 \\ 0 & F_f + G_2 k_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 - \hat{M} G_2 \\ G_2 \end{bmatrix} u_s(t) \quad (21)$$

로 나타난다. 여기서 행렬 \hat{M} 은

$$F_s \hat{M} - \hat{M} (F_f + G_2 k_f) + G_1 k_f = 0 \quad (22)$$

의 해로 주어지며 변환된 벡터는 $z(t) = \hat{T}y(t)$ 이다.

이제 느린 부시스템의 제어벡터를 구하기 위해 느린 부시스템만을 쓰면

$$\dot{z}_1(t) = F_s z_1(t) + (G_1 - \hat{M}G_2) u_s(t) \dots\dots\dots (23)$$

로 된다. 식(23)의 폐회로시스템 고유치가 수직스트립(-h₂, -h₁)에 들어가도록하는 제어벡터 u_s(t)를 정리1을 이용하여 구한다. 이때 변환행렬은 k_s로 둔다. 완전한 복합제어벡터는

$$u(t) = Kx(t) = [0 \ K_r] y(t) + [K_s \ 0] z(t) \\ = ([0 \ K_r] T + [K_s \ 0] \hat{T} T) x(t) \dots (24)$$

로 나타난다. 여기서 변환행렬은

$$K = [K_r L + K_s (I - ML - \hat{M}L); K_r - K_s (M + \hat{M})] (25)$$

로 계산할 수 있다.

(3) 축소차수에 의한 준최적제어

만약 개회로시스템 고유치중의 일부가 이미 주어진 수직스트립내에 존재할 경우에 이 고유치를 배제하거나 혹은 빠른 부시스템을 제외하고 느린 부시스템만을 제어함으로써 계산량을 줄일 수 있다.

느린 부시스템만을 제어할 경우에는 u_r(t) = 0 이므로 u_s(t)만을 구하여 식(14)에 대입하여 정리하면

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_s + G_1 K_s & 0 \\ G_2 K_s & F_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} \dots\dots\dots (26)$$

로 나타난다. 쉽게 줄어든 차수의 동조기를 구성하게 된다.

고유치중의 일부가 이미 주어진 수직스트립내에 존재할 경우에는 시스템을 대각화하여 고유치를 분리하여야 한다. Modal 행렬 D를 이용하여 식(11)을 대각화하면

$$\begin{bmatrix} \dot{P}_1(t) \\ \dot{P}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \wedge_1 & 0 \\ 0 & \wedge_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} u(t) \dots\dots\dots (27)$$

로 된다. 이때 변환된 상태벡터는 P(t) = D⁻¹x(t)이다.

식(27)에서 제어할 상태벡터를 P₁(t)라 할때 제어벡터

$$u(t) = K_D P_1(t) \dots\dots\dots (28)$$

를 정리1을 이용하여 구할 수 있다. 식(28)의 제어벡터를 식(27)에 적용하면

$$\begin{bmatrix} \dot{P}_1(t) \\ \dot{P}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \wedge_1 + Q_1 K_D & 0 \\ Q_2 K_D & \wedge_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{bmatrix} \dots\dots\dots (29)$$

로 나타난다. 식(29)의 고유치는 모두 주어진 수직스트립내에 존재한다. 상태벡터 P(t)와 x(t)는 유사변환(similarity transform) 관계가 있으므로 식(29)를 상태벡터 x(t)에 대한 식으로 바꾸더라도 고유치는 변하지 않기 때문에 축소된 차수의 준최적 동조기를 구현할 수 있다.

4. 예 제

아래의 시간스케일 분리가 가능한 시스템을 검토한다.

$$A = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.32 & 0.0 & 0.0 \\ -0.04 & 0.0 & 0.345 & 0.0 \\ 0.0 & -2.24 & -3.6 & 2.62 \\ 0.0 & 0.0 & 0.10 & -3.02 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.583 & -0.275 \\ 0.0 & 0.385 \\ -1.05 & 0.75 \\ 0.624 & 0.0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad x(0)^T = [10 \ -10 \ 10 \ -10]$$

시스템의 고유치가 -0.1048, -0.1312, -2.6319, -3.7521 이어서 그림 1에서 보는바와 같이 개회로시스템이 점근적으로 안정하기는하나 출력의 크기가 초기값의 5%이내로 떨어지는데 각각 30초와 22초가 걸린다. 출력이 초기값의 20% 이내의 진동과 2초내에 5%이내의 크기로 떨어지도록 하는 동조기를 구현해 보자

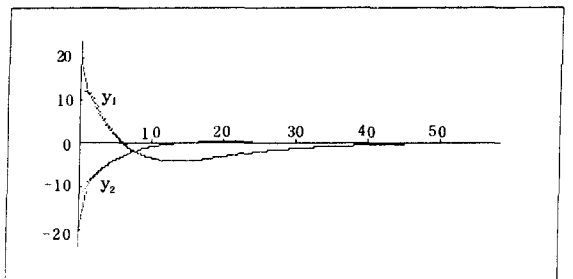


그림 1. 주어진 시스템의 개회로 출력응답
Fig 1. Open-loop output response of the original system.

초기값으로 $h_1=2.5$, $h_2=4.0$ 으로 두고 0.5씩 변화시키면서 구해보면 수직스트립 (-4, -3) 일때 위의 특성을 만족한다.

이때 시간스케일 분리를 행한 시스템의 궤환이득행렬은

$$K = \begin{bmatrix} -9.1714 & -6.9658 & -0.5314 & 0.2760 \\ -2.0541 & -8.8583 & -0.8494 & -0.3854 \end{bmatrix}$$

로 되며 폐회로시스템의 고유치는 $-3.4647 \pm j 0.1265$, $-3.8949 \pm j 0.0543$ 이다.

주어진 시스템을 직접제어할때의 궤환이득행렬은

$$K_D = \begin{bmatrix} -8.3016 & -5.7637 & -0.3602 & 0.7562 \\ -1.0268 & -7.7539 & -0.7632 & -0.4235 \end{bmatrix}$$

이며 폐회로시스템의 고유치는 $-3.4648 \pm j 0.1265$, $-3.8949 \pm j 0.0543$ 이다.

그림 2 와 그림 3 에서 보는바와 같이 시간스케일로 분리된 시스템의 제어와 주어진 시스템의 직접제어로 얻어진 각각의 폐회로시스템의 특성에는 큰 차이가 없다.

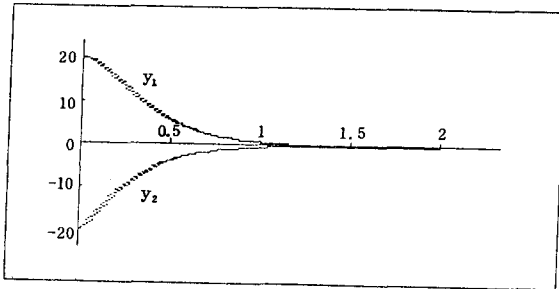


그림 2. 분리된 시스템을 이용한 출력응답
Fig 2. Output response using separated system

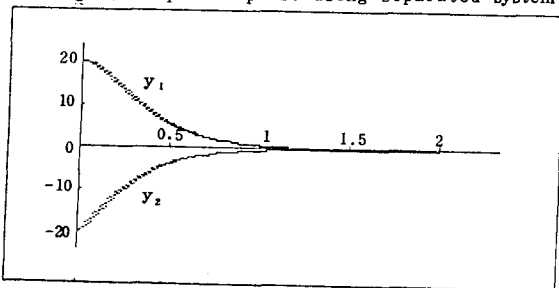


그림 3. 직접제어에 의한 출력
Fig 3. Output response by direct control.

5. 결 론

두개의 시간스케일을 갖는 시스템을 느린 부시스템과 빠른 부시스템으로 분리하여 낮은 차수에서 제어한 후 결합하여 전체시스템을 제어함으로써 계산이 용이하다. 더구나 원래 시스템을 직접제어한 것과 특성에는 큰 차이가 없다. 수직스트립을 변화시키면 여러가지 특성의 동조기를 구현할 수 있다. 그러나 수직스트립을 계속 바꾸어가면서 구하여야하며 빠른감쇠율을 얻으려면 과도특성이 나빠질 수 있다.

이미 수직스트립내에 존재하는 고유치를 배제하거나 느린 부시스템만을 고려하여 쉽게 준최적동조기를 구현할 수 있으며 다중 시간스케일 시스템에도 확장이 가능하다.

참 고 문 헌

1. O.A. Solheim, "Design of optimal Control systems with prescribed eigenvalues," Int.J. Cont., Vol. 15, No.1, pp. 143-160, 1972.
2. J.C. Juang and T.T.Lee, "On optimal pole assignment in a specified region," Int.J. Cont., Vol. 40, No.1, pp. 65-79, 1984.
3. W.L. Eastman and J.A. Bossi, "Design of linear quadratic regulators with assigned eigenstructure," Int.J. Cont., Vol.39, No.4, pp.731-742, 1984.
4. N.Kawasaki and E. Shimemure, "Determining quadratic weighting matrices to locate poles in a specified region," Automatica, vol.19, No.5, pp. 557-560, 1983.
5. L.S. Shieh, H.M. Dib and B.C. Mcinnis, "Linear quadratic reguators with eigenvalue placement in a vertical strip," IEEE, vol.AC-31, No.3, pp. 241-243, 1986, March.
6. P.V. Kokotovic, "A Riccati Equation for block-diagonalization of ill-conditioned system," IEEE vol.AC-20, No.6, pp. 812-814, 1975, December.
7. M.S. Mahmoud and M.G. Singh, Large Scale System Modelling, pp. 265-295, Pergamon press, 1981.
8. R.G. phillips, "A two-stage design of linear feedback controls," IEEE, vol. AC-25, No.6, pp. 1220-1223, 1980, December.