

추종 오차를 최소화하는 극-영점 배치 자기 동조 제어기

한 규정* 이 중용 양 배규 이 상효
 광운 대학 전자공학부

POLE-ZERO PLACEMENT SELF-TUNING CONTROLLER MINIMIZING TRACKING ERROR

Kyu-Jeong Han, Chong-Yong Lee, Tae-Gyu Yang, Sang-Hyo Lee
 Kwang Woon University, Dept. of Electronic ENG.

ABSTRACT

In this paper, a self-tuning controller design is proposed by using pole-zero placement method and considering a system time delay. To get better tracking for the generalized self-tuning controller, pole placement method for the closed loop system and zero placement method for the error transfer function are introduced. The proposed method shows better efficiency than pole placement method for minimizing tracking error.

Simulation gives good results in the reference signal tracking.

1. 서 론

일반화된 평가 함수의 변화를 최소화하는 준최적(Sub-optimal) 방법의 하나인 페루프 계통의 극점을 미리 지정된 위치에 배치하는 극점 배치를 이용한 제어기 설계 방법이 Clarke와 Gawthrop(1)의 연구에 의해 발전하였으며, 비최소 위상(Nonminimum Phase) 계통을 설계 할 수 있고 알고리즘 내에서 Set-point 추종이 직접적으로 이루어 지는 장점이 있다. 그후 극점 배치와 수명 함수의 최소화를 이용한 일반화된 극점 배치 자기 동조 제어기 설계 방법인 Wellstead et al(9), Allidina와 Hughes(2) 등에 의해 제안 되어 왔다.

극점 배치 방법은 비최소 위상(Nonminimum phase) 계통을 보다 강건하게(Robust) 하고 쉽게 설계 할 수 있으나 기존 입력 신호의 추종에는 몇가지 난점이 있다. 또한 Vogel과 Edgar(6)는 적용 극-영점 배치 Dead-time 보상을 발전 시켰다. 이 방법은 극점 배치 방법의 강건성(Robustness), 비최소 위상(Nonminimum phase) 계통, 자기 동조 제어기의 Set-point 추종 모두를 만족한다. 그러나 주어진 페루프 계통의 극점 배치 방법에 너무나 큰 비중을 두었기 때문에 영점 배치 방법은 단지 Sampling 주기를 선택 하는데 국한 되어 왔다.

대부분의 Implicit 자기동조 방법들은 계통의 시간 지연을 극복하는 최소 자승(Least Square) K-Step ahead prediction 방법을 쓴다. 설계 결과가 얼마나 만족스러운 수명을 보이는가는 파라미터 추정의 정확도에 달려있다.

본 논문에서는 기존 입력 신호에 대한 추종 오차를 줄이고자 영점 배치의 중요성을 고려 하였다. 이 알고리즘은 자기 동조 제어기의 설계 방법으로서, 입력력과 기준 제어 신호로 구성된 평가 함수의 변화를 최소화시켜서 기존 입력 신호에 대한 추종을 원활하게 만든다. 그리고 극점 배치 방법의 중요한 점은 추종 오차를 제거하여 주어진 기준 신호와 출력 신호를 일치 시킨다는 것이다. 따라서 본 논문에서는 기존의 극점 배치 방법에 의한 제어기 설계 방법을 수정해서 오차 전달 함수에 대한 영점 배치 방법과 결합하여 기존 입력 신호에 대해 보다 나은 추종 결과를 얻고자 한다. 또한 본 논문에서는 계산량을 감소시키기 위해서 Implicit 방법을 사용하였다.

이러한 방법은 Radar, Robotics와 같은 실용적인 분야에서도 그 유용성이 검토되고 있다.

2. 본 론

(1) 계통 모델 표현

단일 입력력 계통(Single-input/Single-output)이 다음과 같이 시간 지연이 있는 ARMAX 모델을 가진다 하자.

$$A(z^{-1})y(k) = z^{-m}B(z^{-1})u(k) + e(k) \quad (1)$$

여기서 $A(z^{-1}) = a_0 + a_1z^{-1} + \dots + a_nz^{-n}$, $a_0 = 1$
 $B(z^{-1}) = b_0 + b_1z^{-1} + \dots + b_mz^{-m}$, $b_0 \neq 0$
 m ; Sample 구간에서의 계통 시간 지연 상수
 $e(k)$; 외란
 $y(k)$; 계통의 출력
 $u(k)$; 계통의 입력
 z^{-1} ; 후향 이동 연산자, $z^{-1}y(k) = y(k-1)$

(2) 제어기 설계

Clarke 와 Gawthrop 의 자기 동조 제어기 구조에서 수명 함수를 다음과 같이 고려하여, 수명 함수의 최소화를 통해 제어 법칙을 얻는다.

$$I = E (\phi^2(k+m)) \quad (2)$$

여기서 $\phi(k)$ 는 출력과 기준 입력 신호간의 입력값에 대한 각각의 다항식의 선형 결합으로 이루어진 보조함수이며 식(3)과 같고, 그 블록선도는 그림1.과 같다.

$$\phi(k) = P(z^{-1})(y(k) - w(k-m)) + Q(z^{-1})u(k-m) \quad (3)$$

여기서 $P(z^{-1}) = p_0 + p_1z^{-1} + \dots + p_nz^{-n}$, $p_n \neq 0$
 $Q(z^{-1}) = q_0 + q_1z^{-1} + \dots + q_mz^{-m}$, $q_m \neq 0$
 $w(k)$; 기준 입력 신호

시간 지연을 가지면 (1)식과 (3)식 에서

$$\phi(k+m) = (PB/A + Q)u(k) + P/A e(k+m) - Pw(k) \quad (4)$$

여기서 (4)식의 외란항은 다음과 같이 제어 가능 부분과 제어 불가능 부분으로 나눌 수 있다.

$$P/A e(k+m) = F_e(k+m) + G/A e(k) \quad (5)$$

여기서 $F_e(k+m)$; 미래의 외란 값
 $G/A e(k)$; 외란의 과거와 현재값

따라서 다음과 같은 항등식을 얻는다.

$$P/A = F + G/A z^{-1} \quad (6)$$

여기서 $F(z^{-1}) = f_0 + f_1 z^{-1} + \dots + f_{n_f} z^{-n_f}$, $f_0 = 1$

$$G(z^{-1}) = g_0 + g_1 z^{-1} + \dots + g_{n_g} z^{-n_g}, g_0 \neq 0$$

(4)식에서 평가 함수를 최소화 하기 위한 제어 법칙의 (Clarke와 Gawthrop) 조건은 다음과 같다.

$$Hu(k) + Gy(k) + Ew(k) = 0 \quad (7)$$

여기서 $H = FB + Q$, $E = -P$ (8)

$$H(z^{-1}) = h_0 + h_1 z^{-1} + \dots + h_{n_h} z^{-n_h}$$

$$E(z^{-1}) = e_0 + e_1 z^{-1} + \dots + e_{n_e} z^{-n_e}$$

(7)식의 제어 법칙을 입력값에 대해 표현하면

$$w(k) = -G/H y(k) - E/H w(k) \quad (9)$$

계통식(1) 과 (9)식 에서 제어 법칙을 만족하는 원하는 페루프 다항식을 얻는다.

즉,
$$y(k) = BP/(PB+AQ) w(k-m) + H/(PB+AQ) s(k) \quad (10)$$

(I) 극점 배치 방법

페루프. 계통의 과도 특성과 기준 신호의 추종을 만족하도록 페루프 계통의 특성 다항식을 지정 한다. 지정된 특성 다항식을 다음과 같이 고려 하자.

$$T(z^{-1}) = t_0 + t_1 z^{-1} + \dots + t_{n_t} z^{-n_t}$$

(10)식 에서 극점 배치 방법을 적용하면 페루프 다항식에서 다음의 Diophantus 방정식을 얻는다.

$$BP + AQ = TT_0 \quad (11)$$

(11)식 에서 Diophantus의 방정식의 유일해 조건과 (9)식의 제어기 인과율(Causality) 조건을 통하여 P, Q, T 다항식의 차수를 결정한다.

즉,
$$\begin{aligned} \text{Deg } P &= \text{Deg } A - 1 \\ \text{Deg } Q &= \text{Deg } B - 1 \\ \text{Deg } TT_0 &\leq \text{Deg } A + \text{Deg } B - 1 \\ \text{Deg } G &\leq \text{Deg } H \end{aligned} \quad (12)$$

여기서 T 는 관측 다항식(Obserber polinomial)이다. A, B 다항식을 모르고있기 때문에 (12)식에 $F(z^{-1})$ 다항식을 곱하여 A, B 다항식을 치환할 필요가 있다.

$$FBP + FAQ = FTT_0 \quad (13)$$

(13)식에 (6)식의 AF를 대입하면

$$HP - QGz^{-1} = FTT_0 \quad (14)$$

(14)식에서 $t_0 = 1$, $p_0 = 1$ 이라면, 다음 식과 같이 된다.

$$HP - QGz^{-1} = h_0 FT \quad (15)$$

(15)식 으로부터 다항식 P(z⁻¹), Q(z⁻¹) 다항식을 구할 수 있다.

(II) 영점 배치 방법

영점 배치 방법을 적용하여 추종 오차를 줄이기 위해서 다음과 같은 오차 전달 함수(Error transfer function)를 정의한다.

$$\begin{aligned} E(k-m)/w(k-m) &= (w(k-m) - y(k)) / w(k-m) \\ &= AQ/(BP + AQ) \end{aligned} \quad (16)$$

만약 오차 전달 함수의 영점들이 기준 신호의 극점을 포함한다면, 정상 상태의 오차가 좀더 줄어들음을 알 수 있다. 기준 신호의 Z - 변환을 다음과 같이 표현 할 수 있다.

$$r(z^{-1}) = V(z^{-1})/X(z^{-1}) \quad (17)$$

또한 $AQ = AQ'Q^*$ 라 둔다. (18)
여기서

$$Q(z^{-1}) = X(z^{-1}) = q_0 + q_1 z^{-1} + \dots + q_{n_q} z^{-n_q}, q_0 \neq 0$$

따라서 (11)식은 (18)식에 의해 다음과 같이 둔다.

$$BP + AQ'Q^* = TT_0 \quad (19)$$

(12)식을 얻기 위한 조건과 같이하면 P(z⁻¹), Q*(z) 다항식의 차수를 얻는다.

즉,
$$\begin{aligned} \text{Deg } P &= \text{Deg } A + \text{Deg } Q' - 1 \\ \text{Deg } Q^* &= \text{Deg } B - 1 \end{aligned} \quad (20)$$

(19)식 에서도 역시 A(z⁻¹), B(z⁻¹) 다항식을 모르기 때문에 다음과 같은 과정을 거친다.
즉, (19)식에 F(z⁻¹) 다항식을 곱하면

$$FBP + FAQ'Q^* = FTT_0 \quad (21)$$

(19)식에 (6)식의 AF를 대입하면 (16)식과 같은 형태를 얻는다.

즉,
$$AP - Q'Q^*Gz^{-1} = h_0 FTT_0 \quad (22)$$

(22)식으로 부터 P, Q* 다항식을 구할 수 있다.

3. 시뮬레이션

극-영점 배치 방법의 효율성을 보이기 위해서 극점 배치 만의 방법과 시뮬레이션 결과를 비교하였다. A, B 다항식의 차수를 결정 하여주고 극점 T 를 결정해 주면 P, Q 다항식의 차수를 결정 할 수 있다. 그리고 관측 다항식(Ovserber polinomial) T_0 에는 계통의 전달 함수 mode보다 더 빠른 mode를 설정 해 주어야 한다.

(1) 극점 배치 방법만 고려했을 경우.

만약 A, B 다항식을 각각 2차, 1차라 두었을 경우, 극점 배치 방법에서 P, Q 다항식의 차수는 각각 1차, 0차가 된다. 따라서 다음 Step 들을 통해서 P, Q 다항식의 계수를 결정 할 수 있다. 이 알고리즘의 과정은 다음과 같다.

Step 1)
보조 함수 $\phi(k) = P(y(k) - w(k-m)) + Qu(k-m)$ 을 세운다.

Step 2)
 $\phi(k+m) = Hu(k) + Gy(k) + Eu(k) + e(k)$ 에서 H, G, E 를 추정(Estimation)한다.

Step 3)
제어 법칙 $Hu(k) + Gy(k) + Ew(k) = 0$ 를 적용.

Step 4)

HP - QGz⁻¹ = b, FTI. 에서 P, Q 다항식을 구한다.

Step 5)

Step 1)에서 시간 k 가 증가함에 따른 변화값 계산을 반복 수행한다.

(2) 극-영점 배치 방법을 고려했을 경우.

A, B 다항식을 각각 2차, 1차로 하면 극-영점 배치 방법에서는 P, Q 다항식의 차수가 각각 3차, 2차로 된다.

따라서 다음 Step 들을 통해 P, Q 다항식의 계수들을 결정 할 수 있다.

이 알고리즘의 과정은 다음과 같다.

Step 1)

보조 함수 $\phi(k) = P(y(k) - w(k-m)) + Qu(k-m)$ 을 세운다.

Step 2)

기준 입력 신호의 mode 결정. 즉, $AQ = AQ^*Q^*$ 에서 Q를 결정.

Step 3)

$\phi(k+m) = Hu(k) + Gy(k) + Ew(k) + e(k)$ 에서 H, G, E를 추정(Estimation)한다.

Step 4)

제어 법칙 $Hu(k) + Gy(k) + Ew(k) = 0$ 를 적용.

Step 5)

(22)식 HP - Q^{*}Q^{*}Gz⁻¹ = b, FTI. 에서 P, Q 다항식을 구한다.

Step 6)

Step 1)에서 시간 k 가 증가 함에 따른 변화값 계산을 반복 수행한다.

4. 결 론

본 논문에서와 같이, 극점 배치에 의한 제어기 설계 방법을 수정해서 오차 전달 함수에 대한 영점 배치 방법과 결합한 자기 동조 제어기 설계 방법은 기준 신호에 대한 추종이 기존의 극점 배치 방법에 의한 것보다 더욱 충실해졌음을 시뮬레이션 결과를 통하여 보여 주고 있다.

기준 신호 추종의 오차를 더욱 줄여 줄 수 있었던 것은 오차 전달 함수의 영점 배치를 통하여 기준 신호의 mode를 삭제하므로써 오차의 성분을 줄여 주었기 때문이다.

본 논문에서 제안한 방법은 간단하면서도, 그 실용성에 있어 radar 추종 및 robot 궤적 추종을 보다 효과적으로 할 수 있을 것이다.

그러나, 계통의 시간 지연의 변화, 궤적 추종을 위한 기준 신호의 mode 설정 문제와 계통의 안정도 문제가 고려되어야 할 과제이다.

References

- (1) D. W. Clarke and P. J. Gawthrop (1975)
'Self-tuning controller' IEE Proceedings.
Vol. 122, No. 9 pp929-934
- (2) A. Y. Allidina and F. M. Hughes (1980)
'Generalized self-tuning controller with pole assignment' IEE Proceedings.
Vol. 127, part D. No. 1 pp13-18
- (3) K. J. Astrom and B. Wittenmark (1980)
'Self-tuning controllers based on pole-zero placement' IEE Proceedings.
Vol. 127, part D. pp120-130
- (4) A. Y. Allidina, F. M. Hughes and T. Tahmassebi (1986)
'An implicit self-tuning technique for processes with variable time-delay' Int. J. Control
Vol. 44, No. 5 pp1437-1457

- (5) S. C. Puthenpura and J. F. MacGregor (1987)
'Pole-zero placement controllers and self-tuning regulators with better set-point tracking'
IEE Proceedings Vol. 134, Part D. NO. 1 pp26-30
- (6) E. F. Vogel and T. F. Edgar (1982)
Proc. Automatic Control Conf. pp536
- (7) K. J. Astrom and B. Wittenmark (1984)
'Computer controlled systems' Prentice-Hall
- (8) C. J. Harris and S. A. Billings (1981)
'Self-tuning and adaptive control'
IEE Control engineering series 15
- (9) P. E. Wellstead, D. Prager and P. Zanker (1979)
'Pole assignment self-tuning regulator'
Proc. IEE, Vol. 126, No. 8, pp781-787
- (10) 이 승원, 이 종용, 양 대규, 이 상호 (1987)
'적용 극점 배치에 대한 로봇 매니퓰레이터 제어'
전기, 전자 공학 학술 대회 논문집(I) pp241-243

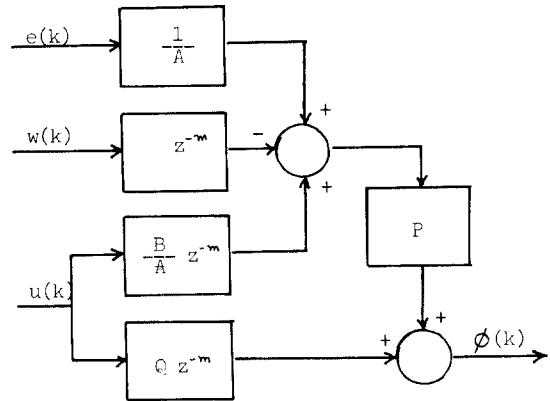


그림 1. 보조 함수 $\phi(k)$ 에 대한 계통도.