

우세 주파수 영역에서의 응답 매칭 방법을 이용한 시스템 저차화

강 동 석 김 수 중
경북대학교 공과대학 전자공학과

System Reduction Using Response Matching Method
in Dominant Frequency Range

Dong Seok Kang and Soo Joong Kim

Department of Electronics, Kyungpook Nat'l Univ.

Abstract

A new mixed approximation method is proposed for the model reduction of high order linear and time-invariant dynamic systems. This method makes allowance for stability and feature retention simultaneously.

After defining dominant frequency range which affects relative stability of systems, a part of denominator is obtained using the energy dispersion method and rests are obtained using dominant frequency response matching method.

The proposed method reflects the characteristic of the original system more faithfully and guarantees absolute stability of the reduction model.

1. 서 론

과학 문명이 급진적으로 발전함에 따라서 우주 항공 기술, 정보 통신망, 국가 전략 시스템등은 이제 거의 제어 이론만으로는 감당할 수 없을 만큼 대규모화 되었다.⁽¹⁻²⁾

이러한 대규모 시스템에 대한 컴퓨터 시뮬레이션, 최적 제어 이론의 해석 및 설계등 컴퓨터를 이용한 제어기가 매우 어렵게 되었다. 이는 시스템 모델의 차수가 커짐에 따라 컴퓨터의 용량과 이에 따른 처리시간이 엄청나게 증가하여 비록 컴퓨터 처리를 하더라도 기존의 방법으로 이러한 문제점을 해결 하는 것이 거의 불가능 하게 되었다.⁽³⁾

이에 대한 해결 방법으로 가장 유용하게 사용되는 방법으로는 가능한 한 시스템의 특성은 유지하면서 그

시스템 모델의 차수를 줄이는 간략법이 있다.

이러한 시스템 모델의 간략법은 크게 시간 영역 간략법과 주파수 영역 간략법으로 나눌수 있다.⁽⁴⁾ 시간 영역 간략법에는 집성법(aggregation)⁽⁵⁾, 섭동법(perturbation) 등이 있으며 주파수 영역 간략법에는 많은 기법들이 제시되었는데 Chen⁽⁶⁾과 Chua⁽⁷⁾ 등은 시스템 전달함수를 연분수로 확장시켜서 간략화모형을 구하는 방법을 제시하였고 Boosley⁽⁸⁾ 는 time-moment 를 일치시켜서 간략화 모델을 구하는 time-moment 기법을 제시하였는데 이방법은 계산이 용이하고 정상상태 응답은 오차가 없으나 원 시스템이 안정되었다고 하더라도 간략화 모델은 불안정할 수 있음이 밝혀졌다.⁽⁹⁾

이러한 문제점을 해결하기 위하여 최근에는 안정도와 특성유지라는 측면을 분리 생각하여 간략화 모델을 구하는 혼합 기법에 대하여 많은 연구가 이루어졌다.⁽¹⁰⁻¹¹⁾

본 논문에서는 안정도와 특성유지를 동시에 고려한 새로운 간략화 혼합 기법을 제시 하였다. 즉 먼저 상대안정도에 큰 영향을 주는 주파수 영역을 우세 주파수 영역으로 정의한 후, 에너지 분산(energy dispersion) 방법을 사용하여 출력의 전체 에너지에 대한 기여도가 큰 동적 mode 들로 간략화 모델의 분모 다항식 일부를 구하고, 나머지 부분들은 우세 주파수 응답을 매칭시켜 구한다. 이러한 간략화 기법은 우세 주파수 영역의 특성을 최대한 유지하면서 동시에 안정도를 보장 받을수 있다.

시뮬레이션을 통하여 선정된 제어 대상에 대해 본 알고리즘을 적용하여 얻어진 간략화 모델의 주파수 응답 및 계단 응답을 구하여 본 결과, Chen⁽¹⁰⁾ 과 Shamash⁽¹¹⁾ 가 제안한 방법들보다 우수한 응답 특성을 얻을수 있었다.

2. 상대안정도

주파수응답과 시간 응답 파라미터 간의 비교와 상관 관계는 제어계의 동작을 예측하는데 매우 유용하다. 일반적으로 우리는 안정한 系뿐만 아니라 그 系가 어느 정도의 안정도를 가지는가에 대하여도 흥미를 갖는다. 일반적으로 후자를 상대안정도라 부른다. 많은 경우에 주파수 위상 응답의 기울기와 주파수 이득 응답중 공진 천두치 (peak resonance) M_p 의 크기가 상대안정도를 나타내는데 이용된다.

상대안정도의 개념을 설명하기 위하여 다음의 전달함수를 갖는 전형적인 2차계를 생각해 보자.

$$G(S) = \frac{\omega_n^2}{S^2 + 2\zeta\omega_n S + \omega_n^2} \quad (1)$$

$S = j\omega$ 로 놓으면 식(1)은 다음으로 한다.

$$G(j\omega) = \frac{1}{[1 - (\omega/\omega_n)^2] + j2\zeta(\omega/\omega_n)} \quad (2)$$

위의 식을 $U = \omega/\omega_n$ 으로 놓음으로써 단순화 할수 있다. 즉 식(2)는 다음과 같다.

$$G(ju) = \frac{1}{(1-u^2) + j2\zeta u} \quad (3)$$

$G(ju)$ 의 이득과 위상은 다음과 같다.

$$|G(ju)| = \frac{1}{[(1-u^2)^2 + (2\zeta u)^2]^{1/2}} \quad (4)$$

$$\angle G(ju) = -\tan^{-1} \frac{2\zeta u}{1-u^2} \quad (5)$$

그림 1은 ζ 값에 따른 $G(ju)$ 의 주파수 이득응답과 위상 응답이다.

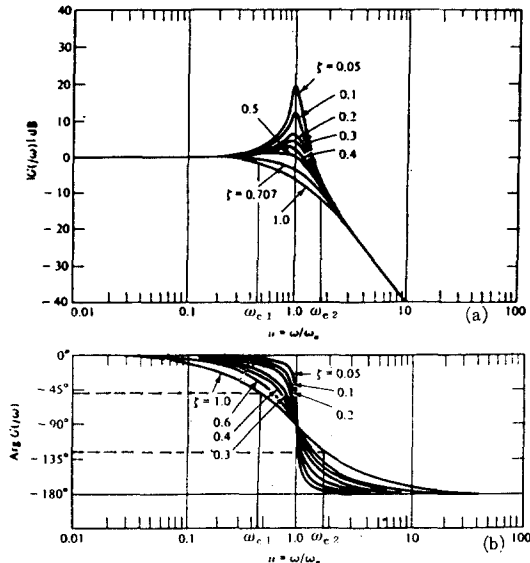


그림 1. (a) $G(S) = 1/[1 + 2\zeta(S/\omega_n) + (S/\omega_n)^2]$ 의 주파수 이득응답
(b) $G(S) = 1/[1 + 2\zeta(S/\omega_n) + (S/\omega_n)^2]$ 의 주파수 위상응답

Fig 1.(a) Frequency Gain Response

$$\text{of } G(S) = 1/[1 + 2\zeta(S/\omega_n) + (S/\omega_n)^2]$$

(b) Frequency Phase Response

$$\text{of } G(S) = 1/[1 + 2\zeta(S/\omega_n) + (S/\omega_n)^2]$$

그림에 나타난 바와 같이 ζ 가 작아질수록 즉, 상대안정도가 감소할수록 공진 피크 M_p 의 크기가 증가하면서 위상 응답의 기울기가 더욱 가파라짐을 알수 있다.

본 연구에서는 상대안정도의 척도가 되는 위의 두가지 특징을 포함하는 주파수 영역을 구분하여 상대안정도에 영향을 주는 우세 주파수 영역으로 정의하고자 한다. 위상 응답의 3dB 주파수를 折點 주파수라 할때 상단 절점 주파수와 하단 절점 주파수를 ω_{c1}, ω_{c2} 로 두고 ω_{c1} 과 ω_{c2} 를 포함하는 주파수 영역을 우세 주파수 영역으로 정의한다. 그림에는 ζ 가 1.0인 경우의 우세 주파수 영역을 나타내었다.

3. 에너지 분산방법

n 차 전달함수가 다음과 같이 표현할 수가 있다고 하자.

$$G(S) = \frac{b_0 + b_1 S + \dots + b_{n-1} S^{n-1}}{a_0 + a_1 S + \dots + a_{n-1} S^{n-1}} = \sum_{i=1}^n \frac{h_i}{S - \mu_i} \quad (6)$$

시스템의 임펄스 응답은 다음과 같다.

$$g(t) = \sum_{i=1}^n h_i e^{\mu_i t} \quad (7)$$

입력에 백색잡음 $W(t)$ 를 인가시 출력은 다음과 같다.

$$y(t) = \int_{-\infty}^t g(t-\alpha) w(\alpha) d\alpha$$

식(7)과 (8)을 이용하여 출력의 auto correlation 함수를 나타낼수 있다.

$$\begin{aligned} R(\tau) &= E[y(t)y(t+\tau)] \\ &= E\left[\int_{-\infty}^t g(t-\alpha) w(\alpha) d\alpha \int_{-\infty}^{t+\tau} g(t+\tau-\beta) w(\beta) d\beta\right] \\ &= \sigma w^2 \int_{-\infty}^t g(t-\alpha) g(t+\tau-\alpha) d\alpha \quad (9) \end{aligned}$$

여기서 σw^2 은 백색잡음 $w(t)$ 의 분산이다.

$t-\alpha = \beta$ 로 두고 식(7)을 (9)에 대입하면 다음식을 얻을수 있다.

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \sigma w^2 \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{-h_i h_j}{\mu_i + \mu_j} e^{\mu_j \tau} \\ &= \sum_{j=1}^n d_j e^{\mu_j \tau} \quad (10) \end{aligned}$$

여기서 $d_j = \sigma w^2 \sum_{i=1}^n \frac{-h_i h_j}{\mu_i + \mu_j}$ 이다. (11)

동적 mode μ_j 의 에너지 분산은 다음과 같이 정의 된다.

$$D_j = \frac{dj}{R(\omega)} = \frac{dj}{\sum_{j=1}^n dj} \quad (12)$$

에너지 분산 D_j 는 출력의 전체 에너지에 대한 동적 mode μ_j 의 에너지 기여도 이다.

4. 우세 주파수 응답 매칭

에너지 기여도가 큰 동적 mode $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n'}$ 을 유지하고 있는 간략화된 m 차 전달함수를 고려하자.

$$R(s) = \frac{C_0 + C_1 s + \dots + C_{m-1} s^{m-1}}{(s-\mu_1)(s-\mu_2)\dots(s-\mu_{n'}) (1+d_1 s + d_2 s^2 + \dots + d_{m-n'} s^{m-n'})} \quad (13)$$

여기서 m 과 n' 은 각각 다음의 조건들을 만족한다.

$$m < n \quad (14)$$

$$1 \leq n' < n, \quad n' : \text{홀수} \quad (15)$$

정상 상태 응답의 오차를 제거하기 위하여 C_0 를 다음식에서 구한다.

$$C_0 = -\frac{b_0}{a_0} (\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{n'}) \quad (16)$$

원 전달함수와 간략화된 전달함수의 주파수 응답 함수는 다음과 같다.

$$G(j\omega) = G_R(\omega) + jG_I(\omega) \\ = \frac{(b_0 - b_2\omega^2 + \dots) + j(b_1\omega - b_3\omega^3 + \dots)}{(a_0 - a_2\omega^2 + \dots) + j(a_1\omega - a_3\omega^3 + \dots)} \quad (17)$$

$$R(j\omega) = [E_R(\omega) + jE_I(\omega)] \frac{(c_0 - c_2\omega^2 + \dots) + j(c_1\omega - c_3\omega^3 + \dots)}{j(d_1\omega - d_3\omega^3 + \dots)} \quad (18)$$

여기서 $G_R(\omega) [G_I(\omega)] = G(j\omega)$ 의 실수 [허수] 부분

$$E_R(\omega) [E_I(\omega)] = \left[\frac{1}{(s-\mu_1)(s-\mu_2)\dots(s-\mu_{n'})} \right] \text{의}$$

실수 [허수] 부분

두 전달함수의 우세 주파수 응답 매칭은 다음과 같다.

$$G(j\omega k) = R(j\omega k) \\ \omega k \in [\omega c_1, \omega c_2] \quad (19)$$

式(17)과 (18)을 式(19)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} Y_R(\omega k) \\ Y_I(\omega k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{1R}(\omega k), X_{2R}(\omega k) \dots \\ X_{1I}(\omega k), X_{2I}(\omega k) \dots \\ X_{(m-n')R}(\omega k), X'_{1R}(\omega k), X'_{2R}(\omega k) \\ X_{(m-n')I}(\omega k), X'_{1I}(\omega k), X'_{2I}(\omega k) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dots, X'_{(m-1)R}(\omega k) \\ \dots, X'_{(m-1)I}(\omega k) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{m-n'} \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{m-1} \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$k = 1, 2, \dots, \lceil 2m - (n' + 1) \rceil / 2$$

여기서 $Y_R(\omega k) = G_R(\omega k) - E_R(\omega k)c_0$.

$$Y_I(\omega k) = G_I(\omega k) - E_I(\omega k)c_0$$

$$X_{iR}(\omega k) = (-1)^{(i+3)} / 2 G_R(\omega k) \omega k^i, \quad i : \text{홀수} \\ (-1)^{(i+2)} / 2 G_R(\omega k) \omega k^i, \quad i : \text{짝수}$$

$$X'_{iR}(\omega k) = (-1)^{(i+1)} / 2 E_I(\omega k) \omega k^i, \quad i : \text{홀수} \\ (-1)^i / 2 E_R(\omega k) \omega k^i, \quad i : \text{짝수}$$

$$X_{iI}(\omega k) = (-1)^{(i+1)} / 2 G_R(\omega k) \omega k^i, \quad i : \text{홀수} \\ (-1)^{(i+2)} / 2 G_I(\omega k) \omega k^i, \quad i : \text{짝수}$$

$$X'_{iI}(\omega k) = (-1)^{(i-1)} / 2 E_R(\omega k) \omega k^i, \quad i : \text{홀수} \\ (-1)^i / 2 E_I(\omega k) \omega k^i, \quad i : \text{짝수}$$

이다.

式(20)에 의하여 만들어진 $\lceil 2m - (n' + 1) \rceil$ 개의 선형 연립 방정식을 풀어서 式(13)의 간략화된 전달함수를 구하게 된다.

5. 시뮬레이션 및 결과 고찰

임의로 선정된 선형 시불변 제어계의 전달함수 $G(s)$

$$G(s) = \frac{96.8 + 167.2s + 84.8s^2 + 13.2s^3}{24 + 50s + 35s^2 + 10s^3 + s^4}$$

라 하고 2차 간략화 모델을 구하자.

$G(s)$ 의 분산해석을 수행하여 표 1에 나타내었다.

표 1. $G(s)$ 의 에너지 분산 해석

Table. The Energy Dispersion Analysis

| 동적 mode | G(s) | |
|-----------|----------------------|-------------|
| μ_1 | d_1 | 0.6033 |
| $(-1, 0)$ | (D_1) | (2.3964 %) |
| μ_2 | d_2 | 4.8667 |
| $(-2, 0)$ | (D_2) | (19.3297 %) |
| μ_3 | d_3 | 2.0452 |
| $(-3, 0)$ | (D_3) | (8.1234 %) |
| μ_4 | d_4 | 17.6619 |
| $(-4, 0)$ | (D_4) | (70.1506 %) |
| Total | $r(0)$ | 25.1771 |
| | $(\sum_{i=1}^4 D_i)$ | (100.00 %) |

주의: 표에 나타난 수치들은 σ^2 으로 정규화 되어 있다.

표 1에 의하여 기여도가 가장 큰 동적mode μ_4 를 선택하고 우세 주파수 영역 $[\omega_{c1}, \omega_{c2}] = [1.6, 6.5]$ 에서 매칭 주파수 $\omega_1 = 3.2$ 를 택하면 2차 간략화 모델 $R_1(S)$ 는 다음과 같다.

$$R_1(S) = \frac{16.133 + 7.20634S}{(S+4)(1+0.54363S)} \quad (20)$$

몇가지 다른 기법들^[10-11]에 의하여 구하여진 동일한 시스템의 간략화 모델은 다음과 같다.

$$R_2(S) = \frac{96.79992 + 167.1999S}{24 + 50S + 34.3003S^2} \quad (\text{by Chen and Han}^{[10]}) \quad (23)$$

$$R_3(S) = \frac{8.06667 + 9.2778S}{2 + 3S + S^2} \quad (\text{by Shamash}^{[11]}) \quad (24)$$

그림 2와 3에 원시스템과 간략화 모델들의 주파수 응답과 단위 계단 응답을 각각 나타내었다.

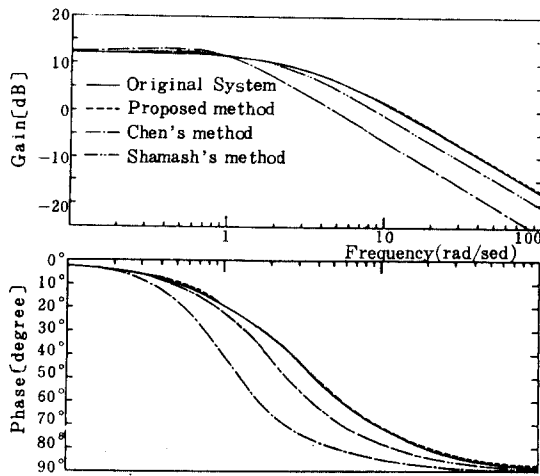


그림 2. 원시스템과 간략화 모델들의 주파수 응답
Fig 2. Frequency Response of Original and Reduced Models

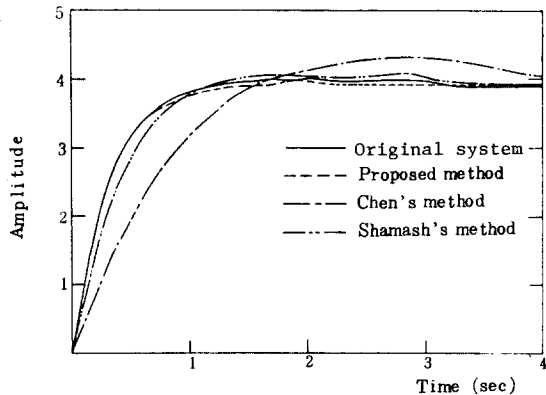


그림 3. 원시스템과 간략화 모델들의 단위 계단 응답
Fig 3. Unit-Step Response of Original and Reduced Models.

6. 결 론

본 논문에서는 상대안정도의 개념을 이용하여 간략화 모델이 원 시스템과 동일한 정도의 안정도를 갖는 간략화 알고리즘을 제안하고 시뮬레이션을 통하여 그 타당성을 알아 보았다.

먼저 상대안정도의 척도가 되는 특징들을 포함하는 주파수 영역을 우세 주파수 영역으로 정의하였으며 에너지 분산 방법을 사용하여 간략화 모델의 분모 다항식 일부를 구하고 나머지 부분들은 우세 주파수 영역의 응답을 매칭 시켜 구하였다. 본 알고리즘을 사용하여 얻어진 간략화 모델은 우세 주파수 영역의 특성을 최대한 유지하면서 원 시스템과 동일한 정도의 안정도를 갖는다. 반면에 에너지 분산 해석시 원 시스템의 고유치를 계산해야 하는것이 문제 될수도 있다.

참 고 문 헌

1. M. Jamshidi, "An overview on the aggregation of large-scale system," IFAC Proc. of the 8-th Triennial Congress. Vol.2, pp. 1304-1314. 1981.
2. 권옥현, 이종수, "대규모 시스템 연구 동향" 전기학회지, Vol.33, March, 1984.
3. S.S. Lamba and S.V. Rao, "On suboptimal control via the Simplified model of davision," IEEE Trans Automat. Control vol. AC-19, pp. 448-450, 1974.
4. M.F. Hutton and B. Friedland, "Routh approximation for reducing order linear, timeinvariant systems," IEEE trans. Automat control, vol. AC-20, pp. 329-331, 1975.
5. M. Aoki, "Control of large scale dynamical system by Aggregation" IEEE Trans, AC-13, no.3, pp. 246-253, 1968.
6. C.F. chen and L.S. Shieh, "A novel approach to linear model simplification" Int.J. Control. vol 8, pp. 561-510, 1968.
7. S.C. Chuang, "Application of continued fraction method for modelling transter function to give more accurate initial transient response," Electron. Lett vol.6, pp. 861-863, 1970.
8. M.J. Bosley and F.P. Lees "A survey of simple transter function derivation from high-order state-variable models" Automatica, vol.8, pp. 765-776, 1972.
9. Y. Shamash, "Model reduction using rath stability and the pade approximation technique" Int.J. Cont. vol.21, No.3. pp. 475-485, 1975.

10. Y. Shamash, "Linear system reduction using pade approximation to allow retention o dominant modes;" Int.J. Contor., vol.21,No.2,pp. 257-272, 1975.
11. T.C. Chen, C.Y. Chang, and K.W. Han, "Model reduction using the stability-equation method and the Pade approximation method J. Franklin Inst. vol.309, pp. 473-490, June 1980.