'87 韓國自動制御學術會議論文集 1987. 10.16~17

# 선형 시변 시스템의 안정도 영역

최 종 호　　　°장 태 정
서울대학교 공과대학 제어계측공학과

# A Stability Region of Linear Time-Varying Systems

Chong-Ho Choi　　　Tae-Jeong Jang
Dept. of Control and Instumentation Eng.,
Seoul National University

## 요 약

이 논문에서는 매개변수(parameter)들이 시간에 따라 변하는 선형 시변 시스템 (linear time-varying system)에서 시스템의 안정도(stability)를 보장할 수 있는 매개변수들의 변동영역(perturbation region of parameters)에 대한 충분 조건을 시간 영역에서 Lyapunov 방법을 사용하여 구하였다. 그리고 이 충분 조건을 만족하는 매개변수 변동영역을 비선형 계획법 (nonlinear programming)을 이용하여 구하는 방법을 제시하였다. 시뮬레이션 결과 이 방법으로 지금까지 이루어져 왔던 다른 연구 결과들보다 더 넓고 다양한 매개변수 변동영역을 구할 수 있었다.

## 1. 서 론

시스템을 해석하고 제어기(controller)를 구성하는데 있어서 가장 중요한 것 중의 하나로 시스템의 안정도 문제가 있다. 선형 시불변 시스템 (linear time-invariant system)에 있어서 시스템이 안정하기 위해서는 시스템 행렬 (system matrix) A 의 고유치 (eigenvalue)들이 모두 음의 실수부를 가지면 된다 [1]. 또는 시스템의 특성 방정식 (characteristic equation)으로 부터 Routh-Hurwitz 방법으로 시스템의 안정도 여부를 판별할 수도 있다 [1]. 그러나 시스템이 비선형(nonlinear)이거나 시변(time-varying)인 경우에는 시스템의 안정도를 따지는 것이 그리 용이하지 않다. 선형 시변 시스템의 경우 시스템 행렬 $A(t)$의 고유치들이 모두 상수이고 음의 실수부를 가지더라도 시스템은 안정하지 않을 수 있으며, 반대로 $A(t)$의 고유치들이 모두 상수이며 그 중에 양의 실수부를 가지는 것이 있더라도 시스템이 점근적으로(asymptotically) 안정한 예가 있음이 알려져 있다 [2]. 따라서 시변 시스템의 경우에는 시스템 행렬 $A(t)$의 고유치가 시스템의 안정도를 판정하는 기준이 될 수 없다.

한개의 시변 또는 비선형 되먹임(feedback) 요소를 가지는 되먹임 제어시스템의 안정도는 circle criterion [3] 또는 Popov criterion [3] 등을 적용하여 판별할 수 있다. 특히 circle criterion 으로 구한 시스템의 안정영역은 2차 (quadratic) Lyapunov 함수를 써서 구할 수 있는 시스템의 최대 안정영역과 동일하다는 것이 알려져 있다 [4]. Rosenbrock[5]과 Cook[6], 그리고 Safonov[7] 등은 circle criterion 을 다변수 되먹임 제어시스템의 경우에 까지 확장하였다. Wu[8][9]는 mode-vector 라는 새로운 개념을 도입하여 이로부터 선형 시변 시스템이 안정하기위한 필요 충분 조건을 구하였다. 그러나 이 방법은 계산이 복잡하여 일반적인 시변 시스템의 안정도 판정에 적용하기에는 어려움이 있다. 최근에는 Yedavalli [10][11], Zhou 등[12]이 매개변수 변동 (parameter perturbation)이 있는 불확실한 시스템 (uncertain system)의 안정도에 대해 연구했는데, 이는 결국 선형 시변 시스템의 안정도 문제와 일치한다.

본 연구에서는 선형 시변 시스템에서 안정도를 보장할 수 있는 매개변수 변동영역에 대한 충분 조건을 Lyapunov 방법에 의한 시간 영역에서의 해석에 의해 유도하고 이 변동영역을 비선형 계획법을 이용하여 구하는 방법을 제시하였다. 본 논문의 접근 방법은 Zhou 등[12]이 제시한 방법과 매우 유사한데 본 논문에서 Zhou 등의 경우보다 더 넓고 다양한 매개변수 변동영역을 구할 수 있었다. 그 이유는 Zhou 등의 경우에는 특수한 Lyapunov 함수를 사용하며 또 해석 도중 norm을 취하는데 비해 본 논문에서는 모든 가능한 Lyapunov 함수를 고려하며 또 norm을 취하지 않고 비선형 계획법으로 직접 해를 구하기 때문인 것으로 생각된다.

## 2. 선형 시변 시스템의 안정도 영역

다음과 같은 선형 시변 시스템을 생각하자.

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) = (A_o + \sum_{i=1}^{m} k_i(t)E_i)x(t) \quad (1)$$

단, $x(t) \in R^n$ 이며, $k_i(t) \in R$, $0 \leq k_i(t) < k_i^*$, $i = 1,2,\ldots,m$, $\forall t \geq t_o$, $A_o \in R^{n\times n}$ 인 상수 Hurwitz 행렬, 그리고 $E_i \in R^{n\times n}$, $i = 1,2,\ldots,m$, 인 상수 행렬이다. 그러면 시스템 (1)의 점근적 안정도에 대한 충분조건을 다음의 정리와 같이 얻을 수 있다.

정리: $\lambda_i(t)$, $i = 1,2,\ldots,m$, 를 다음과 같이 정의하자.

$$\lambda_i(t) = \frac{k_i(t)}{k_i^*}, \quad i = 1,2,\ldots,m. \quad (2)$$

어떤 positive definite 한 $n \times n$ 행렬 $P$, $Q_o$, $Q_i$, $i = 1,2,\ldots,m$, 가 존재하여

$$A_o^T P + PA_o = -Q_o \quad (3)$$

$$(A_o + k_i^* E_i)^T P + P(A_o + k_i^* E_i) = -Q_i, \quad i = 1,2,\ldots,m \quad (4)$$

가 성립하고 $\lambda_i(t)$, $i = 1,2,\ldots,m$, 가

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i(t) \leq 1 \quad (5)$$

을 만족하면 (1)로 주어지는 선형 시변 시스템은 점근적으로 안정하다.

증명: 시스템 (1)에 대한 Lyapunov function $V(t)$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$V(t) \equiv x^T(t)Px(t). \quad (6)$$

$V(t)$를 시간에 대해 미분하면,

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) &= x^T(t)\{(A_o + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(t)k_i^* E_i)^T P + P(A_o + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(t)k_i^* E_i)\}x(t) \\
&= x^T(t)\{(1 - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(t))(A_o^T P + PA_o) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(t)[(A_o + k_i^* E_i)^T P + P(A_o + k_i^* E_i)]\}x(t) \\
&= -x^T(t)\{(1 - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(t))Q_o + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(t)Q_i\}x(t).
\end{aligned} \quad (7)$$

$0 \leq k_i(t) < k_i^*$ 이므로 (2)로 부터

$$0 \leq \lambda_i(t) < 1, \quad i = 1,2,\ldots,m \quad (8)$$

이고, 또 (5)의 조건으로 부터

$$1 - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(t) \geq 0 \quad (9)$$

가 된다. 그러므로 $(1 - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(t))Q_o + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(t)Q_i$ 는 모든 $t \geq t_o$에 대해 positive definite한 행렬이라는 것을 알 수 있다. 따라서 (7)에서 $\dot{V}(t)$ 가 항상 음의 값을 가지게되어 선형 시변 시스템 (1)은 점근적으로 안정하게 된다. #

정리에서의 제약 조건 (3), (4)를 만족시키는 $Q_o$, $P$, $k_i^*$, $Q_i$, $i = 1,2,\ldots,m$, 를 구하였다면, 시스템의 매개변수들이

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{k_i(t)}{k_i^*} \leq 1, \quad 0 \leq k_i(t) < k_i^* \quad (10)$$

의 조건을 만족시키는 범위 내에서 변하는 경우에는 시스템의 안정도를 보장할 수 있다는 것을 알 수 있다. 그러나 (3), (4)로 주어지는 제약조건을 만족하는 $Q_o$, $P$, $k_i^*$, $Q_i$는 무수히 많이 존재한다. 여기서 우리가 원하는 것은 어떻게 하면 $k_i^*$를 가장 크게 하는 해를 구할 수 있느냐는 것이다.

먼저 어떤 positive definite 행렬 $Q_o$ 가 주어졌다고 하자. 그러면 $A_o$ 가 Hurwitz 행렬이므로 (3)의 해로서 항상 positive definite한 행렬 $P$ 를 구할 수 있다 [1]. 이렇게 구해진 $P$ 를 (4)에 대입하여 $k_i^*$ 를 조금씩 증가시켜보면 $Q_i$의 positive definiteness 를 보장하는 $k_i^*$의 최대값을 구할 수 있다. 그러나 어떤 $Q_o$ 가 $k_i^*$의 범위를 최대로 하는 지는 쉽게 알 수가 없다.

이러한 문제를 해결하기 위해 적당한 $Q_o$, $P$, $k_i^*$, $Q_i$ 등을 비선형 계획법으로 구하는 방법을 생각해 보자. $P$, $Q_i$ 는 $Q_o$, $k_i^*$ 만 안다면 (3)과 (4)로 부터 구해지므로, 우선 $k_i^*$ $(i = 1,2,\ldots,m)$ 와 $Q_o$를 변수, (3), (4)와 $k_i^* \geq 0$ 을 제약 조건, 그리고 적당한 단조 증가 함수 $f(k_1^*, k_2^*, \ldots, k_m^*)$를 목적함수로 설정하는 비선형 계획 문제를 생각할 수 있다.

그런데 여기에 $Q_o, Q_1, \ldots, Q_m$ 이 positive definite라는 조건이 추가되어야 하는데 일반적으로 $3 \times 3$ 이상의 행렬에서는 positive definiteness 를 제약식의 형태로 나타낸다는 것이 쉽지 않다. 그래서 우리는 어떤 행렬 $Q$ 가 positive definite 일 때 $Q = LL^T$ 를 만족하는 lower triangular 행렬 $L$ 이 항상 존재한다는 사실을 이용하여 $Q_o = L_o L_o^T$로 나타내고 $Q_o$ 대신 $L_o$를 변수로 놓는다. 그리고 $Q_i$ $(i = 1,2,\ldots,m)$의 positive definiteness 조건을 충족시키기 위해 $Q_i = L_i L_i^T$로 나타내고 변수 $L_i$ $(i = 1,2,\ldots,m)$를 추가한다. 그러면 어떤 $L_o$, $L_i$ 에 대해서도 $Q_o$, $Q_i$ $(i = 1,2,\ldots,m)$는 positive definite 라는 것을 알 수 있다. $P$ 는 (3)으로 부터 $A_o$ 와 $Q_o$로 나타낼 수 있으므로 (4) 에 대입하여 $P$ 를 소거한다.

이상의 방법을 $A(t)$ 가 $2 \times 2$ 행렬이고 시변 매개변수의 갯수가 1 개일 경우에 대해 적용해 보자.

먼저 목적 함수를 $f(k_1^*) = k_1^{*\alpha}$, $\alpha > 0$ 로 놓고 문제를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\underset{k_1^*, L_o, L_1}{\text{maximize}} \quad f(k_1^*) = k_1^{*\alpha} \ , \ \alpha > 0 \tag{11}$$

subject to

$$A_o^T P + P A_o = -Q_o = -L_o L_o^T \tag{12}$$

$$(A_o + k_1^* E_1)^T P + P(A_o + k_1^* E_1) = -Q_1 = -L_1 L_1^T \tag{13}$$

$$k_1^* \geq 0 \ . \tag{14}$$

그런데 여기서 (12), (13)은 행렬식의 형태이므로 비선형 계획법의 제약 조건으로 그대로 쓸 수는 없고 약간의 변형이 필요하다. $A_o$, $E_1$, $Q_o$, $Q_1$, $L_o$, $L_1$, $P$ 행렬을 다음과 같이 나타내자.

$$A_o = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} e'_{11} & e'_{12} \\ e'_{21} & e'_{22} \end{bmatrix},$$

$$Q_o = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{21} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix}, \quad Q_1 = \begin{bmatrix} q'_{11} & q'_{21} \\ q'_{21} & q'_{22} \end{bmatrix},$$

$$L_o = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix}, \quad L_1 = \begin{bmatrix} l'_{11} & 0 \\ l'_{21} & l'_{22} \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}. \tag{15}$$

그러면 (12)로 부터 다음 식들을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} 2a_{11}p_{11} + \ 2a_{21}p_{21} \qquad\qquad &= -q_{11} \\ a_{12}p_{11} + (a_{11}+a_{22})p_{21} + a_{21}p_{22} &= -q_{21} \\ 2a_{12}p_{21} + \ 2a_{22}p_{22} &= -q_{22} \ . \end{aligned} \tag{16}$$

이 식들을 행렬을 써서 나타내면

$$\begin{bmatrix} 2a_{11} & 2a_{21} & 0 \\ a_{12} & a_{11}+a_{22} & a_{21} \\ 0 & 2a_{12} & 2a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{22} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} q_{11} \\ q_{21} \\ q_{22} \end{bmatrix} \tag{17}$$

와 같이 된다. 따라서

$$\begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{22} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 2a_{11} & 2a_{21} & 0 \\ a_{12} & a_{11}+a_{22} & a_{21} \\ 0 & 2a_{12} & 2a_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} q_{11} \\ q_{21} \\ q_{22} \end{bmatrix} \tag{18}$$

와 같이 P 의 요소들을 $A_o$ 와 $Q_o$ 의 요소들의 식으로 표현할 수 있다. (12)를 이용하여 (13)을 다시쓰면

$$k_1^* (E_1^T P + P E_1) - Q_o = -Q_1 \tag{19}$$

과 같이 되고 이를 (17)과 유사하게 변형하면

$$k_1^* \begin{bmatrix} 2e'_{11} & 2e'_{21} & 0 \\ e'_{12} & e'_{11}+e'_{22} & e'_{21} \\ 0 & 2e'_{12} & 2e'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} q_{11} \\ q_{21} \\ q_{22} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} q'_{11} \\ q'_{21} \\ q'_{22} \end{bmatrix} \tag{20}$$

가 된다. 여기에 (18)을 대입하면

$$\begin{bmatrix} q'_{11} \\ q'_{21} \\ q'_{22} \end{bmatrix} = \left\{ k_1^* \begin{bmatrix} 2e'_{11} & 2e'_{21} & 0 \\ e'_{12} & e'_{11}+e'_{22} & e'_{21} \\ 0 & 2e'_{12} & 2e'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2a_{11} & 2a_{21} & 0 \\ a_{12} & a_{11}+a_{22} & a_{21} \\ 0 & 2a_{12} & 2a_{22} \end{bmatrix}^{-1} + I \right\} \begin{bmatrix} q_{11} \\ q_{21} \\ q_{22} \end{bmatrix} \tag{21}$$

을 얻는다. $Q_o = L_o L_o^T$, $Q_1 = L_1 L_1^T$ 를 이용하면 (21)을 다음과 같이 바꿀 수 있다.

$$\begin{bmatrix} l'^2_{11} \\ l'_{11} l'_{21} \\ l'^2_{21} + l'^2_{22} \end{bmatrix} = \left\{ k_1^* \begin{bmatrix} 2e'_{11} & 2e'_{21} & 0 \\ e'_{12} & e'_{11}+e'_{22} & e'_{21} \\ 0 & 2e'_{12} & 2e'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2a_{11} & 2a_{21} & 0 \\ a_{12} & a_{11}+a_{22} & a_{21} \\ 0 & 2a_{12} & 2a_{22} \end{bmatrix}^{-1} + I \right\} \begin{bmatrix} l^2_{11} \\ l_{11} l_{21} \\ l^2_{21} + l^2_{22} \end{bmatrix} . \tag{22}$$

따라서 (11)-(14) 로 표현되는 비선형 계획 문제를 다시 정리하면 다음과 같다.

$$\underset{\substack{k_1^*, l_{ij}, l'_{ij} \\ i \geq j \ \ i, j = 1, 2}}{\text{maximize}} \quad f(k_1^*) = k_1^{*\alpha}, \ \ \alpha > 0 \tag{23}$$

subject to

$$\begin{bmatrix} l'^2_{11} \\ l'_{11} l'_{21} \\ l'^2_{21} + l'^2_{22} \end{bmatrix} = \left\{ k_1^* \begin{bmatrix} 2e'_{11} & 2e'_{21} & 0 \\ e'_{12} & e'_{11}+e'_{22} & e'_{21} \\ 0 & 2e'_{12} & 2e'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2a_{11} & 2a_{21} & 0 \\ a_{12} & a_{11}+a_{22} & a_{21} \\ 0 & 2a_{12} & 2a_{22} \end{bmatrix}^{-1} + I \right\} \begin{bmatrix} l^2_{11} \\ l_{11} l_{21} \\ l^2_{21} + l^2_{22} \end{bmatrix} \tag{24}$$

$$k_1^* \geq 0 \ . \tag{25}$$

이상에서 우리는 $A(t)$가 $2 \times 2$ 행렬이고 시변 매개변수가 1개일 경우에 대하여 비선형 계획법으로 시스템의 안정도를 보장하는 최대의 $k_1^*$을 구하기 위한 목적함수와 등호, 부등호 제약식들을 표시할 수 있음을 보였다. 비슷한 방법으로 $A(t)$가 $2 \times 2$ 행렬이고 시변 매개변수가 2개인 경우의 비선형 계획 문제를 써보면 다음과 같다.

$$\underset{\substack{k_1^*, k_2^* \\ l_{ij}, l'_{ij}, l''_{ij} \\ i \geq j \ \ i, j = 1, 2}}{\text{maximize}} \quad f(k_1^*, k_2^*) = k_1^{*\alpha} + k_2^{*\alpha} \ , \ \alpha > 0 \tag{26}$$

subject to

$$\begin{bmatrix} l'^2_{11} \\ l'_{11} l'_{21} \\ l'^2_{21} + l'^2_{22} \end{bmatrix} = \left\{ k_1^* \begin{bmatrix} 2e'_{11} & 2e'_{21} & 0 \\ e'_{12} & e'_{11}+e'_{22} & e'_{21} \\ 0 & 2e'_{12} & 2e'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2a_{11} & 2a_{21} & 0 \\ a_{12} & a_{11}+a_{22} & a_{21} \\ 0 & 2a_{12} & 2a_{22} \end{bmatrix}^{-1} + I \right\} \begin{bmatrix} l^2_{11} \\ l_{11} l_{21} \\ l^2_{21} + l^2_{22} \end{bmatrix} \tag{27}$$

$$\begin{bmatrix} {l''_{11}}^2 \\ l''_{11} l''_{21} \\ {l''_{21}}^2 + {l''_{22}}^2 \end{bmatrix} = \left\{ k_2^* \begin{bmatrix} 2e''_{11} & 2e''_{21} & 0 \\ e''_{12} & e''_{11}+e''_{22} & e''_{21} \\ 0 & 2e''_{12} & 2e''_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2a_{11} & 2a_{21} & 0 \\ a_{12} & a_{11}+a_{22} & a_{21} \\ 0 & 2a_{12} & 2a_{22} \end{bmatrix}^{-1} + I \right\} \begin{bmatrix} l_{11}^2 \\ l_{11} l_{21} \\ l_{21}^2 + l_{22}^2 \end{bmatrix} \tag{28}$$

$$k_1^* \geqslant 0 \tag{29}$$

$$k_2^* \geqslant 0 \,. \tag{30}$$

단,

$$E_2 = \begin{bmatrix} e''_{11} & e''_{12} \\ e''_{21} & e''_{22} \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} l''_{11} & 0 \\ l''_{21} & l''_{22} \end{bmatrix}. \tag{31}$$

차수가 $3 \times 3$ 이상이고 시변 매개변수의 갯수가 여러 개일 때에도 위와 마찬가지의 방법으로 목적함수와 제약식을 만들 수 있다. 그리고 이러한 문제는 이미 개발되어 있는 비선형 프로그램 팩키지를 사용하면 비교적 쉽게 해를 구할 수 있다.

주: $k_i(t)$가 $-k_i^- < k_i(t) < k_i^+$, $k_i^+ > 0$, $k_i^- > 0$ 와 같이 +, - 양 방향으로 모두 변할 때는 $k_i^+(t)$, $k_i^-(t)$ 를

$$k_i^+(t) = \begin{cases} k_i(t) & ,\text{if } \; 0 \leqslant k_i(t) < k_i^+ \\ 0 & ,\text{otherwise} \end{cases} \tag{32}$$

$$k_i^-(t) = \begin{cases} -k_i(t) & ,\text{if } \; -k_i^- < k_i(t) \leqslant 0 \\ 0 & ,\text{otherwise} \end{cases} \tag{33}$$

와 같이 정의하여 $k_i(t)E_i$ 대신 $k_i^+(t)E_i + k_i^-(t)(-E_i)$ 를 사용하면 $0 \leqslant k_i^+(t) < k_i$ , $0 \leqslant k_i^-(t) < k_i^-$ 가 되어 앞의 정리를 그대로 적용할 수 있다. 대신 제약식은 2배로 늘어나게 된다.

그 밖에 다음과 같은 몇가지 경우에 대해서도 비선형 계획 문제를 조금 바꾸어 목적에 맞는 $k_i(t)$의 변동영역을 구할 수 있다.

1) $|k_i(t)| < k_i^*$ 인 범위를 구하고자 할 때 : $k_i^+$, $k_i^-$ 를 $k_i^+ = k_i^- = k_i^*$ 로 설정한다.

2) $k_1^* : k_2^* : \ldots : k_m^* = r_1 : r_2 : \ldots : r_m$ 과 같이 구해지는 각 $k_i^*$의 비를 주고자 할 때 : $k_i^* = r_i k^*$, $i = 1,2,\ldots,m$, 으로 놓고 변수는 $k^*$ 하나만 둔다. 그리고 목적함수는 $f(k^*) = k^{*\alpha}$, $\alpha > 0$ 로 놓는다.

3) $k_i^*$, $i = 1,2,\ldots,m$, 중 그 값을 알고 있거나 어떤 특정한 값으로 설정하고자 하는 것이 있을 때 : 해당하는 $k_i^*$ 값을 미리 설정하고 변수에서 제외한다.

이와같이 여러가지 형태의 비선형 계획 문제를 구성하여 목적함수를 최대로 하는 $Q_o$를 구하면 이를 (3)에 대입하여 그 식을 만족하는 P를 구할 수 있다. 이 P 에 대해 적당한 알고리즘을 사용하면 (4)의 $Q_i$, $i = 1,2,\ldots,m$, 의 positive definiteness를 보장하는 최대의 $k_i^*$를 다시 구할 수 있는데 이 값은 처음에 비선형 계획법으로 구한 것보다는 같거나 더 큰 값이 될 것이라는 것을 짐작할 수 있다.

예: Zhou 등[12]의 Example 2와 같은 예를 들겠다. 다음과 같이 주어지는 출력 되먹임 시스템 (output feedback system)을 생각하자.

$$dx(t)/dt = (A + BK(t)C)\, x(t) \,. \tag{34}$$

단,

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

이고, 되먹임 이득 K(t)는

$$K(t) = \begin{bmatrix} -1+k_1(t) & 0 \\ 0 & -1+k_2(t) \end{bmatrix} \tag{35}$$

로 가정한다.

이러한 시스템에 대하여 시스템의 안정도를 보장할 수 있는 매개변수 $k_1(t)$, $k_2(t)$의 변동 범위를 구해보자. 먼저 시스템 (34)는 다음과 같은 꼴로 바꿀 수 있다.

$$x(t)/dt = (A_o + k_1(t)E_1 + k_2(t)E_2)\, x(t) \,. \tag{36}$$

단,

$$A_o = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & -1 & -4 \end{bmatrix},$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{37}$$

$k_1(t)$, $k_2(t)$ 가

$$-k_i^- < k_i(t) < k_i^+ , \quad k_i^+, k_i^- > 0, \; i = 1,2 \tag{38}$$

을 만족한다고 할 때, $k_i^- = r_i^- k^*$ , $k_i^+ = r_i^+ k^*$ , $i = 1,2$, 로 놓고 목적함수를

$$f(k^*) = k^{*\frac{1}{4}} \tag{39}$$

라 했을 때 비선형 계획 문제를 구성하여 $r_i^-$ , $r_i^+$ , $i = 1,2$, 의 설정값에 따라 표 1과 같은 여러가지 해들을 얻을 수 있다. 각 경우에 대한 매개변수 변동영역을 그림 1에 나타내었는데, 본 논문에서 제시한 방법으로 구한 매개변수 변동영역이 Zhou 등[12]의 방법 ii)로 구한 것보다 더 넓다는 것을 알 수 있다.

## 3. 결 론

본 논문에서는 여러 개의 매개변수들이 시간에 따라 변하는 선형 시변 시스템에서 안정도를 보장하는 매개변수 변동영역에 대한 충분 조건을 시간 영역에서 Lyapunov 방법을 사용하여 구하였다. 그리고 비선형 계획법을 사용하여 이 충분 조건을 만족하는 매개변수 변동영역을 구하는 방법을 제시하였다. 이 방법으로 지금까지의 다른 연구 결과들보다 더 넓고 다양한 매개변수 변동영역을 구할 수 있었는데, 이것은 여기서 제시한 방법이 모든 가능한 2차 Lyapunov 함수를 다 고려하고, 또 norm을 사용하지 않았기 때문이다. 그러나 비선형 계획법을 사용하므로 최적값에 수렴하는데 어려움이 있고, 또한 시스템의 차수와 시변 매개변수의 갯수가 증가함에 따라 계산량이 기하 급수적으로 늘어난다는 단점을 가지고 있다.

## 참 고 문 헌


[1] C. T. Chen, Linear system theory and design, Holt, Rinehart and Winston, 1984.

[2] M. Y. Wu, "A note on stability of linear time-varying systems," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-19, p. 162, Apr., 1974.

[3] M. Vidyasagar, Nonlinear systems analysis, Prentice-Hall, 1978.

[4] J. L. Willems, "The circle criterion and quadratic Lyapunov functions for stability analysis," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-18, p. 184, Apr., 1973.

[5] H. H. Rosenbrock, "Multivariable circle theorems," Proc. IMA Conf. on Recent Mathematical Developments in Control, pp. 345-365., 1972.

[6] P. A. Cook, "Modified multivariable circle theorems," Proc. IMA Conf. on Recent Mathematical Developments in Control, pp. 367-372., 1972.

[7] M. G. Safonov, "A multiloop generalization of the circle criterion for stability margin analysis," IEEE Trans. Automat.Contr., vol. AC-26, pp. 415-422, Apr., 1981.

[8] M. Y. Wu, "A new concept of eigenvalues and eigenvectors and its applications," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-25, pp. 824-826, Aug., 1980.

[9] M. Y. Wu, "On stability of linear time-varying systmes," Int. J. Systems Sci., vol. 15, No. 2, pp. 137-150, 1984.

[10] R. K. Yedavalli, "Improved measures of stability robustness for linear state space models," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-30, pp. 577-579, June, 1985.

[11] R. K. Yedavalli and Z. Liang, "Reduced conservatism in stability robustness bounds by state transformation," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-31, pp. 863-866, Sep., 1986.

[12] K. Zhou and P.P. Khargonekar, "Stability robustness bounds for linear state-space models with structured uncertainty," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-32, pp. 621-623, July, 1987.


표 1

| case | $k_1^-:k_1^+:k_2^-:k_2^+$ | $k_1^-$ | $k_1^+$ | $k_2^-$ | $k_2^+$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2: 1: 3.4:1.7 | 3.4998 | 1.7499 | 5.9496 | 2.9748 |
| 2 | 5: 1: 8.5:1.7 | 8.7495 | 1.7499 | 14.874 | 2.9748 |
| 3 | 100:1:170:1.7 | 174.85 | 1.7485 | 297.24 | 2.9724 |
| Zhou 등의 방법 ii) | | 1.6523 | 1.6523 | 2.8473 | 2.8473 |

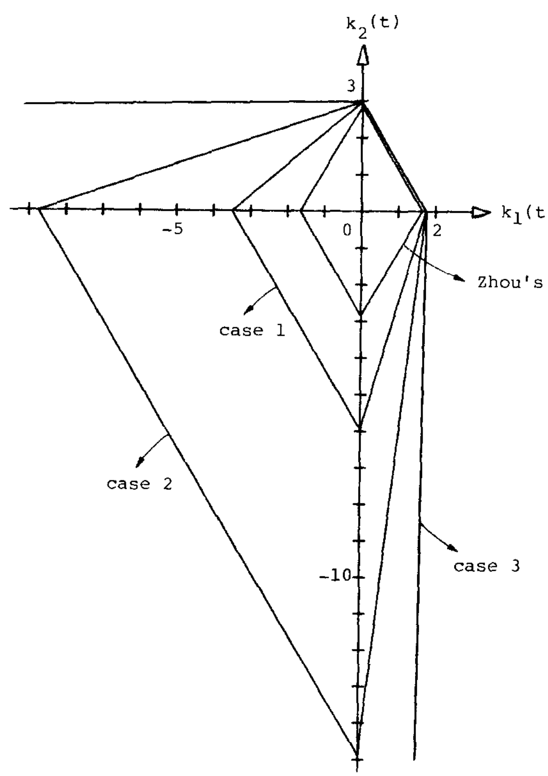


그림 1 안정도를 보장하는 매개변수 변동영역