

시간 지연을 이용한 상태 제어기의 실현 및 상태 분석

김광태, 김구락, 김재환, 최종락, 김영수  
 연해 기계장

Application and Analysis on State Feedback Controller  
 using Time Delay

Kwang-Tae Kim, Ku-Lak Jung, Jae-Whan Kim, Joong-Lak Choi, Yong-Su Kim  
 Chinhae Machine Depot

Abstract

Linear time invariant systems are considered. It is assumed that only partial state variables are observable for feedback control. In this study, a new method is presented for designing a state feedback controller. It is based on augmenting the original system by additional integrator and using time delayed feedback of observable variables. Several examples and its computer simulation results are given to show the effectiveness of the proposed method.

1. 서론

선형 시불변 제어계에서 부분적으로만 상태 변수가 측정 가능할 때 상태 변수를 재구성하기 위한 한 방법으로 측정 가능한 상태 변수의 시간 지연된 값들로부터 상태 변수를 재구성<sup>2)</sup> 하고자 한다. 기존의 방법으로는 입력과 입력의 미분치가 상태 변수 재구성시 포함될 때 입력과 입력의 미분값을 새로운 측정 가능한 상태 변수로 만들어 줄 만큼의 적분기를 추가해야 한다. 본 논문에서는 이를 하나의 적분기만으로 대체하여 상태 변수를 재구성 하는 방법을 제시하고 실제 서어보 시스템에 적용하여 시뮬레이션 하였다.

2. 본론

선형 시불변 제어계의 상태 방정식은 다음과 같다.

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

$$z = Dy \quad \text{---- (1)}$$

(1)식에서  $x$ 는  $(n \times 1)$ ,  $y$ 는  $(m \times 1)$  관측 가능한 상태 변수,  $z$ 는 출력,  $u$ 는 입력이다.  $A$ 는  $(n \times n)$ ,  $B$ 는  $(n \times 1)$ ,  $C$ 는  $(m \times n)$ ,  $D$ 는  $(1 \times m)$  상수 matrix이다.

$x$ 와  $y$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \quad y = [y_1, y_2, \dots, y_m]^T$$

$$c = [c_1, c_2, \dots, c_m] \quad \text{--- (2)}$$

(1)식에서  $y$ 의  $j$ 번째 미분치는 아래와 같이 주어진다.

$$y^j = CA^j x + CA^{j-1} Bu + CA^{j-2} Bu^{(1)} + \dots + CBu^{(j-1)}$$

$$i=1, 2, \dots, m \quad \text{---- (3)}$$

따라서 다음식이 성립한다.

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} y \\ y^{(1)} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & 0 & \dots & 0 \\ CA & CB & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{n-1} & CA^{n-2}B & \dots & CB \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \\ \vdots \\ u^{(n-2)} \end{bmatrix}$$

$$= F \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \quad \text{(4)}$$

matrix  $F$ 의 row를 서로 교환하여 새로운 matrix  $E$ 를 얻는다.  $n+\mu$   $n-1-\mu$

$$E = \left. \begin{bmatrix} E_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ E_1 & e_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ E_2 & * & e_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E_\mu & * & * & \dots & e_\mu & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \right\} (n, m) \quad \text{(5)}$$

$n \quad 1$

여기서  $e_i$ 는 0이 아닌 column matrix이고 \*는 임의의 matrix,  $0 \leq \mu \leq n-1$  이다.

rank  $[E]$  가  $n$  이면 모든 상태 변수를 측정 가능한 상태 변수와 그 미분치로 나타낼 수 있다.

그러나 rank  $[E_0]$  가  $n$ 보다 작으면 상태 변수 재구성 시 입력과 그 입력의 미분 성분 이 포함되게 되는데 이러한 입력 성분을 측정 가능한 새로운 상태 변수로 만들어 주기 위해서는 입력측에  $l+1$  개의 극분기를 추가해야 한다.  $l$ 은 상태 변수를 재구성 할 때 포함되는 입력의 최고 미분 차수이다.

본 논문에서는 여러개의 극분기를 추가하는 대신에 한개의 극분기로 대체하여 상태 변수를 재구성 하고자 한다. 이와같이 한개의 극분기만 추가할 때 입력은 새로운 측정 가능한 상태 변수가 되어  $y_{m+1} = x_{n+1} = u$ 가 된다. 따라서 새로이 augment 된 시스템의 상태 방정식을 쓰면 다음과 같다.

$$\dot{x}_n = A_n x_n + B_n u_n \quad (6)$$

$$y_n = C_n x_n$$

$$z_n = D_n y_n$$

$$x_n = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix} \quad y_n = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$A_n = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_n = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D_n = \begin{bmatrix} D & 0 \end{bmatrix}$$

$y_n$ 의 미분값들을 계산하여 다음과 같은 식을 유도 할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} y_n \\ y_n^{(1)} \\ \vdots \\ y_n^{(n-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ C_n A_n & C_n B_n & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_n A_n^{n-1} & C_n A_n^{n-2} B_n & C_n A_n^{n-3} B_n & \dots & C_n B_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ u_n \\ u_n^{(1)} \\ \vdots \\ u_n^{(n-2)} \end{bmatrix} = F_n \begin{bmatrix} x_n \\ u_n \end{bmatrix} \quad (7)$$

$F_n$ 의 row 들을 서로 교환하여 다음과 같은 matrix 를 얻는다.

$$F_n' = \begin{bmatrix} C & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ CA & CB & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ CA^{n-1} & CA^{n-2}B & CA^{n-3}B & \dots & CB & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

따라서 다음식이 성립한다.

$$\begin{bmatrix} y \\ y_{m+1} \end{bmatrix} = F_n' \begin{bmatrix} x_n \\ u_n \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$y_{m+1} = \begin{bmatrix} y_{m+1} \\ y_{m+1}^{(1)} \\ \vdots \\ y_{m+1}^{(n-1)} \end{bmatrix} \quad u_n = \begin{bmatrix} u_n \\ u_n^{(1)} \\ \vdots \\ u_n^{(n-2)} \end{bmatrix}$$

(9)식 으로 부터  $y_{m+1} = x_{n+1}$ ,  $\dot{y}_{m+1} = u$ , ...  $y_{m+1}^{(n-1)} = u^{(n-2)}$  가 되어 입력의 모든 값들이  $y_{m+1}$  과 그 미분으로 나타낼 수 있다. 이때 측정 가능한 상태 변수의 미분은 (10)식과 같이 근사적으로 나타낼 수 있다.

$$\dot{y}(t) \cong \frac{1}{h} [y(t) - y(t-h)] \quad (10)$$

$$\ddot{y}(t) \cong \frac{1}{h^2} [y(t) - 2y(t-h) + y(t-2h)]$$

$$\vdots$$

지금까지 설명한 방법으로 측정 불가능한 상태 변수 를 갖는 시스템에 최적 제어를 적용하는 방법을 설명한다. 출력  $z(t)$ 가 주어 진 기준 함수  $z_{ref}$  를 따라가는 시스템을 고려해 본다. 이때 시스템의 방정식을 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$\dot{x}_{ref}(t) = A x_{ref}(t) + B u_{ref}(t) \quad (11)$$

$$y_{ref}(t) = C x_{ref}(t)$$

$z_{ref}(t) = D y_{ref}(t)$   
또 새로운 오차 변수를 다음과 같이 정의한다.

$$x_c(t) \triangleq x(t) - x_{ref}(t) \quad u_c(t) \triangleq u(t) - u_{ref}(t) \quad (12)$$

$$y_c(t) \triangleq y(t) - y_{ref}(t) \quad z_c(t) \triangleq z(t) - z_{ref}(t)$$

식(12) 또한 상태 방정식을 만족한다.

$x_c(t) = 0$ 이면  $z(t) = z_{ref}$  이므로 이 시스템의 제어 입력 을 구 하면  $z$ 가  $z_{ref}$  를 따라가는 시스템을 구성 할 수 있다. 즉,

$$J(u_c) = \int_0^{\infty} [x_c^T(t) Q x_c(t) + u_c^T R u_c(t)] dt$$

를 최소화 하는  $u$  는 식(13)과 같다.

$$u_c(t) = - \sum_{i=1}^{n+1} K_i x_c \quad (13)$$

따라서 시스템 제어 입력  $u$  는

$$u(t) = u_{ref}(t) - \sum_{i=1}^{n+1} K_i x_c \quad (14)$$

가 된다.

### 3. 시뮬레이션 및 결과

최대 overshoot가 5% 이내며 2% settling time 이 2초 이내인 제어를 설계한다.

예1) rank  $[E_0] < n$  경우

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \ 0 \ 1]x$$

$$z = y$$

위 시스템의 F matrix 를 구해보면

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

이다. rank  $[E_0]$  가 3보다 작으므로 상태 변수의

제구성에 입력이 포함된다.

(1) 기존의 방법

$$\text{rank} [E_0^T \ E_1^T \ E_2^T] = 3 = n$$

즉 2개의 극분기가 입력에 추가된다. 이때

augment 된 시스템의 상태 방정식은 다음과 같다.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \hat{u}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x \quad z = [1 \ 0] y$$

따라서 상태 변수를 제구성해 보면

$$x_1 = y_1 - \ddot{y}_1 + y_3$$

$$x_2 = \dot{y}_1 - y_2$$

$$x_3 = \ddot{y}_1 - y_3$$

$$x_4 = y_2$$

$$x_5 = y_3$$

$$J = \int_0^{\infty} [\alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2 + \alpha_3 y_3^2 + \alpha_4 y_2^2 + \alpha_5 y_3^2 + \beta u^2] dt$$

에서  $\alpha_1 = 5, \alpha_2 = 0.5, \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0, \beta = 0.001$

로 하여 시뮬레이션한 결과가 그림 7에 나타나 있다.

(2) 제안한 방법

한개 극분기만 추가된 시스템의 상태 방정식은 다음과 같다.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

$$z = [1 \ 0] y$$

제구성된 상태 변수는

$$x_1 = y_1 - \ddot{y}_1 + \dot{y}_2$$

$$x_2 = \dot{y}_1 - y_2$$

$$x_3 = \ddot{y}_1 - \dot{y}_2$$

$$x_4 = y_2$$

이다.

그리고 성능 지수 J는 다음과 같다.

$$J = \int_0^{\infty} (\alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 \dot{y}_1^2 + \alpha_3 \ddot{y}_1^2 + \alpha_4 y_2^2 + \alpha_5 \dot{y}_2^2 + \beta u^2) dt$$

$$= \int_0^{\infty} (\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + (\alpha_1 + \alpha_3) x_3^2 + (\alpha_2 + \alpha_4) x_4^2 + 2\alpha_1 x_1 x_3 + 2\alpha_2 x_2 x_4 + 2\alpha_3 x_3 u + (\alpha_3 + \alpha_5 + \beta) u^2) dt$$

위의 cost function으로 입력 x와 u의 correlate term 이 발생하므로 standard Q, R matrix를 사용 할수 없고 다음과 같이 변형시켜 새로운 Q, R matrix 를 얻어야 한다.

$$J = \int_0^{\infty} \begin{bmatrix} x^T & u^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \alpha_2 & 0 \\ \alpha_1 & 0 & \alpha_1 + \alpha_3 & 0 & \alpha_3 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \alpha_2 + \alpha_4 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & 0 & \alpha_3 + \alpha_5 + \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} dt$$

$$= \int_0^{\infty} \begin{bmatrix} x^T & u^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} dt$$

$$= \int_0^{\infty} [(u^T + x^T A_{12} A_{22}^{-1}) A_{22} (u + A_{22}^{-1} A_{21} x) + x^T (A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}) x] dt$$

$$u' = u + x^T A_{12} A_{22}^{-1} = u + \alpha_3 x_3 / (\alpha_3 + \alpha_5 + \beta)$$

$$Q' = A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \alpha_2 & 0 \\ \alpha_1 & 0 & \alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_3^2 / (\alpha_3 + \alpha_5 + \beta) & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \alpha_2 + \alpha_4 & 0 \end{bmatrix}$$

따라서 J는

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q' x + u'^T R u') dt \quad R = A_{22}$$

가 된다. 그리고 새로운 상태 방정식은

$$\dot{x} = Ax + Bu = Ax + B(u - A_{22}^{-1} A_{21} x)$$

$$= (A - B A_{22}^{-1} A_{21}) x + Bu$$

여기서  $\alpha_1=5, \alpha_2=0.5, \alpha_3=\alpha_4=\alpha_5=0 \quad \beta = 0.001$ 로 하여 계단 입력에 대한 응답이 그림7에 나타나 있다.

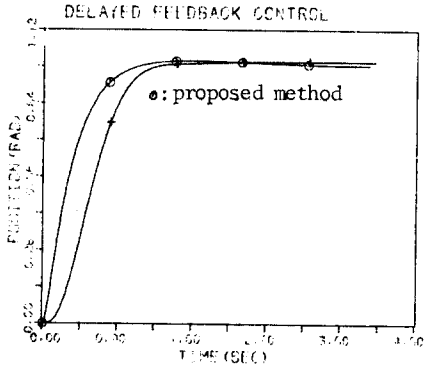
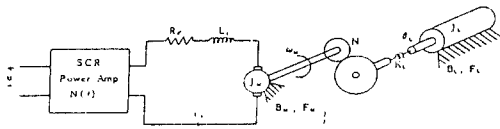


Fig. 1. delay time(1 msec.)

예2) 십계 서어보 시스템 적용예  
여기서는 십계 서어보 시스템에 시간 지연 변환을 적용하여 그 특성을 알아본다. 피 제어 시스템인 서어보 메카니즘의 구성도는 그림2와 같이 서어보 증폭기, PM 모터, 감속 기어, 및 부하로 이루어져 있다.



- $R_a$  : 전기자(armature)저항  $L_a$  : 전기자 인덕턴스(inductance)
- $J_m$  : 회전자(rotor)의 관성 모멘트
- $B_m$  : 회전자의 점성 마찰력(viscosity friction)
- $F_m$  : 회전자의 쿨롱 마찰력(coulomb friction)
- $N$  : 기어비  $K_L$  : 부하축의 비틀림 상수(stiffness of shaft)
- $J_L$  : 부하의 관성 모멘트  $B_L$  : 부하의 점성 마찰력
- $F_L$  : 부하의 쿨롱 마찰력

Fig. 2. 피제어 시스템의 구성도

서어보 모터의 권류와 속도를 각각 shunt 와 tachometer로 측정하여 변환시켜 얻어진 모델의 전달함수 구성도는 그림3과 같다.

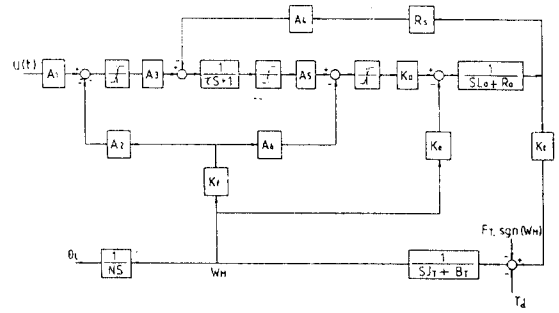


Fig. 3. 서어보 시스템의 전달함수 구성도

그림 3에서 전달함수 를 구 하면 다음과 같다.

$$\frac{\theta_L(s)}{u(s)} = \frac{A_1 A_3 K_1 A_5}{A_4 R_a J_T N} = \frac{b}{s(s+a)}$$

이상과 같이 유도된 피제어 시스템의 전달함수 모델로 부터 위치 제어를 위한 상태 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

위와 같이 얻은 상태 방정식으로 부터 시간지연 변환 제어 이론을 적용시켜 본다. 그런데 십계 plant 와 같이 측정 잡음과 시스템 잡음을 고려한 결과와의 이론을 그대로 적용할 수 없다. 따라서 본 예제에서는 Kalman Filter를 사용하여 측정 가능한 상태 변수를 추정한후 그 추정된 상태 변수로 모든 상태 변수를 재구성 하였다. Kalman Filter설계를 위해 측정 잡음 분산을 0.01 와 시스템 잡음 분산은 0.02 (rad)로 하여 다음의 상태 변수를 재구성 하였다.

$$x_1 = y$$

$$x_2 = \dot{y} = \frac{1}{h} (y(t) - y(t-h))$$

$\mu$ -processor로 제어하기 위해 controller를 다음과 같이 구성 하였다.

$$u(k) = -K_1 y(k) - \frac{K_2}{h} y(k) + \frac{K_2}{h} y(k-1) + k_1 z_{ref}$$

여기서  $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.04 \end{bmatrix} \quad R = 0.001$

로 하여 지연 시간을 변해가며 시뮬레이션한 결과가

그림4에 보여준다.

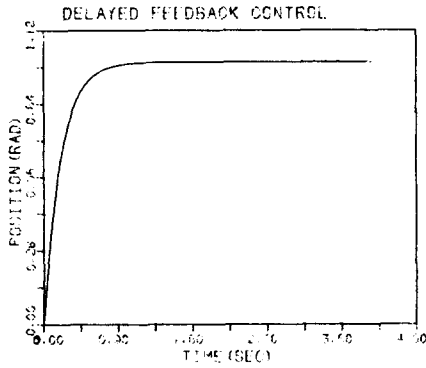


Fig. 4-a) delay time: 1 msec.

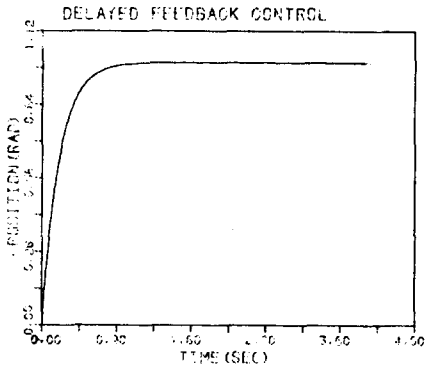


Fig. 4-b) delay time: 2 msec.

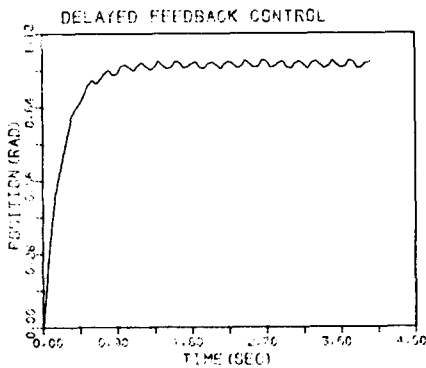


Fig. 4-c) delay time: 3 msec.

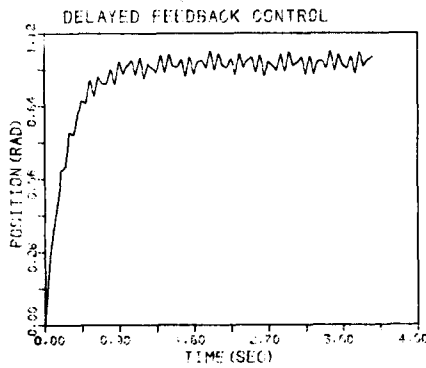


Fig. 4-d) delay time: 5 msec.

#### 4. 결론

지금까지의 이론과 시뮬레이션 결과에서 볼 때 제안한 방법으로도 상태 변수를 재구성 할 수 있음은 알 수 있다. 그리고 이 방법을 이용하여 서어보 시스템에 적용한 결과 만족할 만한 결과를 얻을 수 있었다. 그러나 적절한 지연시간값의 선정이 어렵고 미분차수가 커지면 상대적으로 계산 이득이 커져 시스템이 불안정해 집 요인이 있다.

#### 5. 참고 문헌

1. Pearson, J. B. : Compensator design for dynamic optimization, Int. J. Control,9(4), 1969.
2. Chyung, D. H. : On a method for reconstructing inaccessible state variable using time delay, the 8-th IFAC World Congress, August 1981, Kyoto, Japan.
3. Mita, T. : Design of a zero-sensitive observer, Int. J. Control, 22(2), 1975.
4. Fortmann, T. E. and Williamson, D. : Design of low-order observers for linear feedback control laws, IEEE Trans. Automatic Control, 17(3), June 1972.
5. Arbel, A. and Tse, E. : Observer design for large-scale linear systems, IEEE Trans. Automatic Control, 24(3) June 1979.
6. Paul Katz : Digital Control using, Prentice Microprocessors international INC, London (1981), pp 268-270.