경사투영법의 오차 보정에 관한 연구

* 박 영 문, ** 김 건 중, ** °이 형 란, ** 김 용 배
* 서울대학교, ** 충남대학교

A Study of Error Adjustment in Gradient Projection Method

* Y.M.Park, ** G.J.Kim, ** H.R.Lee, ** Y.B.Kim
* Seoul National Univ., ** Chungnam National Univ.

1. 서 론

선형 프로그래밍과 비선형 프로그래밍 기법은 부등호 제약조건이 있는 다변수로 구성된 대형 시스템에서 널리 이용되고 있다. 선형 프로래밍 문제에서는 제약조건과 목적함수가 시스템변수의 선형식으로 주어지며 비선형 프로그래밍 문제에서는 제약조건이 하나 또는 그 이상의 비선형식을 포함하고 있거나 목적함수가 시스템변수의 비선형 함수인 경우 이다. 비선형 프로그래밍 문제는 두가지로 분류되는데 첫째, 목적함수는 비선형이고 제약조건이 선형인 경우이고[(1)] 두째는 목적함수가 선형이거나 비선형 이거나 관계없이 비선형 제약조건을 포함하고 있는 경우이다. [(2)] 여기에서 다루고자하는 것은 비선형 프로그래밍 문제의 첫번째로 분류된 경우이며 선형문제는 이 문제의 특수한 형태에 불과하다.

최적화 문제는 등호제약조건과 부등호 제약조건을 만족하는 허용영역 내에서 목적함수를 최대화(최소화) 하는 시스템변수를 결정하는 문제로서 선형프로래밍 문제의 해법으로는 선형계획법(Simplex Method)[(3)]이 폭 넓게 사용되고 있다. 부등호 제약조건이 있는 비선형문제의 해법으로는 페날티 함수를 이용한 방법, Wolfe의 reduced gradient 법과경사 투영법 등이 있다.[(4)] Rosen의 경사투영법은 목적함수의 경사방향을 구속조건이 되는 초평면에 투영시키는 투영 행열을 구해 감소방향을 결정한다. 이 방법에서는 구속조건 중 작용제약조건의 선정과 투영행열의 계산이 중요한 부분이된다. 그러나 투영행열을 계산할때 컴퓨터의 절삭오차 때문에 대형 문제에서는 정확한 감소방향을 얻기어렵고 이로인하여 허용 영역을 벗어나는 감소방향이 되거나 적정 스텝사이즈가 정확히 구해지지않아 구속 제약조건을 벗어나게 되는 경우가있다. 본문에서는 이러한 절삭오차 때문에 발생하는 문제점을 보정하는 방법을 제시하고자 한다.

2. 본 론

2.1 경사 투영법

목적함수 f(X) 가 m-차원 공간 Em 에서 정의된 콘벡스 함수라 하면 선형제약 조건이 있는 최적화 문제는 다음과 같다.

$$\text{Minimize } f(X) \quad \cdots\cdots\cdots (1)$$

$$\text{Subject to } N'X - V > 0 \quad \cdots\cdots (2)$$

단, $N = [\, n_1, \ldots, n_e, n_{e+1}, \ldots, n_{e+I}]$

$V = [\, V_1, \ldots, V_e, V_{e+1}, \ldots, V_{e+I}]$

e : 등호 제약조건의 갯수

I : 부등호 제약조건의 갯수

nj : j 번째 제약조건의 법선 벡터

X^i 가 초기 허용점이라 하면 X^{i+1} 은 다음과 같이 구해진다.

$$X^{i+1} = X^i + \tau m \cdot Z^i \quad \cdots\cdots (3)$$

이 때 Z_i 는 음의 최대 경사방향을 경계면에 투영시킨 벡터이다.

$$Z^{i} = \frac{Pq\ [\ -\nabla f\ ]}{\|Pq\ [\ -\nabla f\ ]\|} \qquad \cdots\cdots\ (4)$$

여기서 Pq는 q개의 작용 제약조건들의 법선 벡터의 행열 Nq를 사용하여 계산된 다음과 같은 투영행열이다.[(1)]

$$Pq = I - Nq\ [\ Nq'\ Nq\ ]^{-1}\ Nq' \qquad \cdots\ (5)$$

식(3)에서 τm은 어떠한 제약조건도 벗어나지 않고 취할 수 있는 최대거리로서 다음과 같이 구해진다.

Z^{i} 방향으로 Hj 초평면까지의 거리를 τj 라 하자.

$$X^{i+1} = X^{i} + \tau j\ .\ Z^{i} \qquad \cdots\cdots\ (6)$$

식(6)의 X^{i+1} 은 다음과 같은 조건을 만족한다.

$$nj'\ .\ X^{i+1} - Vj = 0 \qquad \cdots\cdots\ (7)$$

식(6)을 식(7)에 대입하면 τj를 구할 수 있다.

$$\tau j = \frac{Vj - nj'\ X}{nj'\ Z^{i}} \qquad \cdots\cdots\ (8)$$

최적 스텝 사이즈는 모든 비작용 제약조건들(inactive constraints)에 대한 τj중에 양의 값을 갖는 최소거리를 취한다. 구속 제약조건 중에 실제로 작용 제약조건이 되는 것을 선정하기위해 감소방향을 결정하는 식을 재음미 해 본다.

$$Z = P\ .\ [\ -\nabla f\ ]$$
$$= [\ -\nabla f\ ] + Nq\ .\ R \qquad \cdots\cdots\ (9)$$

단, $R = -\ [\ Nq'\ Nq\ ]^{-1}\ Nq'\ [\ -\nabla f\ ]$

여기에서 등호 제약조건인 경우에는 $|Rj| < \varepsilon$ 이면 비작용 제약조건이 되고 부등호 제약조건인 경우에는 Rj가 음의값을 가질때만 작용 제약조건이 된다는 것을 쉽게 알 수 있다.

완전해(global solution)의 필요충분조건은 다음과 같다.

$$Pq\ .\ [\ -\nabla f\ ] = 0 \qquad \cdots\cdots\ (10)$$

$$R < 0 \qquad \cdots\cdots\ (11)$$

식(10)은 경계면과 경사방향이 수직임을 의미하고 식(11)은 목적함수의 감소 방향이 허용영역 내에서는 없음을 의미한다.

2.2 절삭오차의 발생과 보정

식(5)의 투영행열 Pq를 구할 때 역행열 계산이 필요하게 된다. 이 때 매번의 반복 계산에서 Nq를 구성하는 초평면은 하나 또는 몇개가 추가되거나 제거되므로 그 때마다 역행열 계산을 다시 하지 않고 역행열 수정 알고리즘을 써서 계산하는 것이 일반적이다.[(5)]

Nq 에 nj가 추가 될 경우 :

$Bo = [\ [Nq]'\ [Nq]\ ]^{-1}$ 라 놓자.

$$[\ [\ Nq : nj\ ]'\ [\ Nq : nj\ ]\ ]^{-1}$$

$$= \begin{vmatrix} Nq'\ Nq & Nq'\ nj \\ nj'\ Nq & nj'\ nj \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{vmatrix}$$

$B_{11} = Bo - r'\ B_{12}$, $B_{12} = -r\ /\ \|Q\|^{2} = B_{21}'$

$B_{22} = 1/\|Q\|^{2}$

단, $r = [Bo][Nq]'\ nj$

$$[Pq] = I - [Nq]\ [\ [Nq]'[Nq]\ ]^{-1}\ [Nq]'$$

$$Q = [Pq]\ nj$$

Nq에서 제약조건이 하나 빠질 경우 :

$$[\ [Nq]'\ [Nq]\ ]^{-1} = \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{vmatrix}$$

$$[\ [Nq_{-1}]'\ [Nq_{-1}]\ ]^{-1} = [B_{11}] - [B_{12}][B_{22}]^{-1}[B_{21}]$$

(단, 이 때 제거되는 초평면이 맨 마지막에 위치하도록 한다.)

이렇게 역행열 수정을 반복하는 과정에서 절삭 오차는 누적되며 이러한 절삭 오차 때문에 $X^{i+1} = X^{i} + \tau m.Z$ 로 얻어진 새로운 점 X^{i+1} 이 구속 제약조건 중 비작용 제약조건이나 작용 제약조건을 벗어나게 될 수 있다. 이러한 경우에는 비작용 제약조건에서 벗어난 초평면을 등호제약 조건과 같이 취급하여 Nq에 포함시킨 후 아래와 같은 식에의해 보정해준다.

$$X = -\ [Nq]\ [\ [Nq]'[Nq]\ ]^{-1}\ E \qquad \cdots\ (12)$$

$$X^{k+1} = X^{k} + \Delta X$$

Rosen의 경사 투영법에서는 모든 구속 제약조건으

로 Nq를 구성하여 투영행열을 계산한 다음 비작용 제약조건을 선별해서 제거해 나갔는데 본문에서는 그림1의 흐름도와 같이 부등호 제약조건 중 구속 제약조건이 되는 법선벡타와 경사방향과의 내적이 양의 값을 갖게되면 이 제약조건은 비작용 제약조건이므로 nj를 Nq에 포함시키지 않고 투영행열을 계산한다. 이 것은 벡터의 내적만을 계산하여 간단히 비작용 제약조건을 선별해내는 방법이다. 이렇게 구한 투영행열을 이용하여 감소방향과 적정 스텝사이즈를 구하여 새로운 점 X^{i+1} 을 결정하고 절삭 오차 때문에 이 점이 허용영역을 벗어났을 경우에는 다음 반복 계산을 하기전에 허용영역내에 오도록 보정을 해준다. 식 (12)의 역행열 계산은 투영행열을 계산할때 이미 구했으므로 오차를 보정하는 과정은 비교적 간단하다.

제약조건중에 변수의 상한과 하한으로 주어지는 것이 많은 경우의 문제를 푸는 것으로 가정하고 $Bj = nj.X - Vj$ 의 계산을 편리하게 하고 초기치를 효과적으로 지정하기 위해 제약조건의 배열은 등호제약조건, 다항식으로 표시되는 부등호 제약조건, 변수의 상한, 변수의 하한의 순서로 배열하도록 프로그램을 구성하였다.

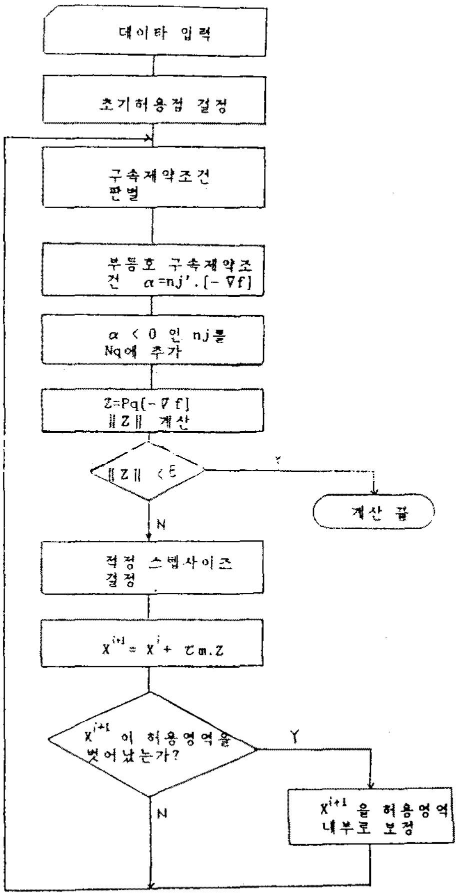

그림1 프로그램의 흐름도

3. 결 론

대형계통에서 최적화 문제를 푸는데는 컴퓨터의 절삭 오차가 허용영역을 벗어날 만큼 심각한 영향을 미치는데 이미 사용되고 있는 GPM에 이를 보정하는 간단한 과정을 추가해 보았다. 프로그램의 시험 실행은 절삭오차의 영향이 큰 대형 문제 대신에 실수형 변수를 Single Precision으로 선언하고 컴퓨터의 절삭오차가 크도록하여 반복 계산 도중에 허용영역을 벗어나도록 유도한 다음 보정방법의 타당성을 확인하었다.

참고문헌

1) Rosen, J.B., "The Gradient Projection Method for Nonlinear Programming. Part I. Linear constraints," J.SIAM(1960),181-217.

2) Rosen,J.B.,"The Gradient Projection Method for Nonlinear Programming. Part II. Nonlinear constraints," ,514-533.

3) Mokthars Bazaraa & John J.Jarvis , "Linear Programming and Network Flows", John Wiley & sons,108-121,1977

4) Mokthars Bazaraa & C.M.Shetty, "Nonlinear Programming",John Wiley & sons, 332-339, 1979.

5) Donald E.Kirk, "Optimal Control Theory An Introduction",Prentice-Hall, 373-408,1970.

6) 강 내국,"A New Approach to G.P",석사학위논문,1985.