C-1 유한요소법에 의한 자계해석에 관한 연구.

임 달 호*, 김 규 탁*, °김 용 수*
*; 한 양 대 학 교

A Study on The Magnetic Field Analysis by C-1 Finite Element Method.

Im Dal-Ho*, Kim Gyu-Tak*, Kim Yong-Su*°
*; Hanyang University

1. 서 론

전기기기의 자계해석에 유한요소법이 도입된 이래, 국내에서도 많은 연구가 있었으나 지금까지의 해석 방법은 요소의 경계상에서 Vector Potential A 만을 연속으로 하는 C-0 유한요소법으로 해석하였다.

C-0 유한요소법중 선형요소는 수식전개 및 Computer Program이 간단하기 때문에 널리 사용되고 있으나 전기기기 해석 및 설계시 중요정수인 자속밀도는 Vector Potential의 미분연산으로 계산하기 때문에 정확도가 매우 떨어지며 균일 매질일지라도 요소의 경계상에서 불연속이 된다.

그러므로 C-0 유한요소법에서 자속밀도를 연속으로 하려면 최소한 요소내의 절점수가 21개인 Quintic 요소 이상으로 보간 차수를 높여야 한다. 이경우 수식전개 및 Computer Program 이 매우 복잡하며, 요소내부 및 경계상에 절점이 존재하여 Condensation이 필요하게 된다. 더 나아가 기존의 C-0 유한요소법에서 자속밀도는 Gaussian 적분점에서 계산되므로 구하고자 하는 절점의 자속밀도는 정확도가 떨어져 고에너지 밀도의 전기기기 해석시 문제점이 많았다.

이러한 문제점을 해결하기 위하여, 본 연구에서는 요소의 경계상에서 Vector Potential A 와 자속밀도의 법선방향 성분이 연속성을 만족하며, Vector Potential의 방향 도함수를 기본 방정식의 미지수로 하는 C-1 유한요소법을 제안하였다. 이러한 C-1 유한요소법에서는 자속밀도 B를 System 방정식으로 부터 직접 구할 수 있다.

본 연구의 유용성을 규명하기 위하여 해석적인 모델에 이 방법을 적용하였으며, 선형요소를 이용한 C-0 유한요소법의 결과와 비교, 검토하였다.

2. 적 용 이 론

2.1 기본방정식과 개변수의 근사화

적용한 모델의 자속분포를 2차원적으로 해석하기 위하여 다음과 같은 가정을 두었다.

(1) 입력전류 밀도는 z 방향 성분만 존재하며 z 방향 변화율은 없다.

(2) 도체의 와류 및 표피효과는 무시한다.

(3) 자계는 준 정상상태로 변위전류는 무시한다.

이상과 같은 가정하에서 Maxwell 의 전자방정식을 적용하여 지배방정식을 유도하면 식 1)과 같은 Vector Potential에 대한 Poisson 방정식이 된다.

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = -\mu_0 J \qquad 1)$$

여기서 A 및 J는 Vecter Potential 및 전류밀도의 z 방향 성분이며 μ_0는 공기중의 투자율이다. 식 1)에 유한요소법을 적용하기 위하여 해석영역을 그림 1과 같이 9개의 D.O.F. (Degree of Freedom)을 갖는 삼각요소로 분할하면 각 절점의 개변수는 다음과 같다.

$$\{A_i\} = [\,A_1\,,\ A_{1x}\,,\ A_{1y}\,,\ A_2\,,\ A_{2x}\,,\ A_{2y}\,,\ A_3\,,\ A_{3x}\,,\ A_{3y}\,]^T \qquad 2)$$

여기서 Ai는 i 절점의 Vector Potential이며, Aix, Aiy는 각각 i 절점에서의 Vector Potential A 의 x,y 방향 1 계 도함수이다. 이경우 요소 내부의 개 변수 변화는 면적좌표계의 3 차 다항식으로 표현할수 있다.

$$[\,L_1^3 \quad L_2^3 \quad L_3^3 \quad L_1^2L_2 \quad L_1^2L_3 \quad L_2^2L_3 \quad L_2^2L_1 \quad L_3^2L_1 \quad L_3^2L_2 \quad L_1L_2L_3\,] \qquad 3)$$

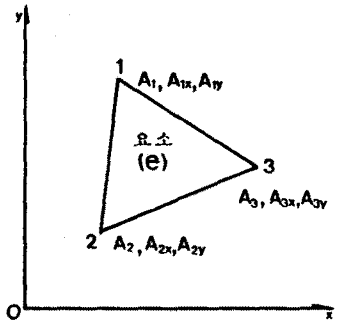

그림 1. 9개의 D.O.F.을 갖는 삼각요소

그림 1과 같이 9개의 D.O.F.을 갖는 요소는 위 항중 한항을 소거시켜야 한다. 그러나 L_i^3 항은 각 절점에서 Vector Potential을 규정하는 항이며, $L_i^2L_j$ 항은 Vector Potential에는 영향을 주지않으나 Vector Potential의 미분치 즉 자속밀도의 x,y 성분을 결정하는 항이다.

마지막항 $L_1L_2L_3$는 각 절점의 Potential 및 도함수에는 영향을 미치지 않고 단지 요소내부의 변화만을 나타낸다. 그러나 이 항을 제거하면 요소내부의 Potential 및 그 미분치의 근사에 오차를 수반하게 되며 특히 요소경계의 미분치가 불연속이 되는 점이 발생하게되어, 본 연구에서는 $L_i^2L_j$ 항에 가중치 로 고려하여 해의 정확도를 높였다. 그림 1과 같은 D.O.F.을 갖는 요소에서 Vetor Potential A 를 규정하는 D.O.F.는 3 으로 선형적인 변화를 하므로 요소내 임의 점에서의 Vector Potential A 는 다음과 같이 근사화 된다.

$$A = \alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \alpha_3 L_3 + \alpha_4 (L_1^2 L_2 + D) + \alpha_5 (L_1^2 L_3 + D) + \alpha_6 (L_2^2 L_3 + D) + \alpha_7 (L_2^2 L_1 + D) + \alpha_8 (L_3^2 L_1 + D) + \alpha_9 (L_3^2 L_2 + D) \qquad 4)$$

여기서 L_i는 각 절점에 대한 면적죄표로 $L_i = (a_i + b_i \cdot x + c_i \cdot y)/2\Delta$로 표현 되며 $a = x_j y_k - x_k y_j$, $b = y_j - y_k$, $c = x_k - x_j$ 로 주어지는 순환수이고 Δ 는 삼각요소의 면적이다. 또 $G = w L_1 L_2 L_3$ 로 w 는 0 - 1사이의 값을 갖는 상수이다.

이 근사화된 게 변수 A 를 각 절점치 { Ai } 로 표현하면

$$A = [N] [C] \{ A_i \} \qquad 5)$$

이다.

2-2. C-1 유한요소와 게 방정식

식 1) 의 지배방정식으로 부터 해석영역의 에너지 범함수를 유도하면 다음과 같다.

$$\chi = \int_D \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial y} \right)^2 - 2\mu_0 A J \right\} dxdy \qquad 6)$$

여기서 D 는 전 해석영역이다.

각 요소에서의 범함수를 χ^e라 하면

$$\chi = \Sigma \chi^e$$

$$= \sum_{e=1}^{g} \int_\Delta \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial y} \right)^2 - 2\mu_0 A J \right\} dxdy \qquad 7)$$

이다. 식 1) 의 Poisson 방정식의 해를 구하는 것은 식 7) 의 에너지 범함수가 최소화 되는 A_p를 구하는 것과 등가이다. 즉

$$\frac{\partial \chi}{\partial A_p} = \sum_{e=1}^{g} \frac{\partial \chi^e}{\partial A_p}$$

$$= [S] \{ A_p \} - \{ F \} = 0 \qquad 8)$$

P=1,2,3, . . . ,총 D.O.F.수

을 만족하는 A_p가 식 1) 의 해이다.

여기서

$$[S] = \sum_{e=1}^{g} \int_\Delta [C]^T \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{\partial N}{\partial y} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{\partial N}{\partial y} \end{bmatrix} [C] \, dxdy$$

$$\{F\} = \sum_{e=1}^{g} \mu_0 J \int_\Delta [C]^T \lfloor N \rfloor^T dxdy \qquad 9)$$

이다.

3. 적용 예 및 결과 고찰

3-1. 해석 모델

본 연구 에서는 C-0 유한요소와 C-1 유한요소로 해석시 정확도를 비교하기 위하여 Poisson 방정식이 성립하는 해석적 모델을 택하였다.

그림 2와 같은 해석모델에 대하여 전기, 자기적인 대칭성을 고려하여 우측 부분만을 해석영역으로 설정하였다. 경계조건으로는 x 축, y 축, 에 접하는 부분과 x = a (0.07 m)상에서는 자연경계조건을, 도체 부분과 충분한 거리를 둔 y = b (0.17 m) 에서는 Dirchlet 경계조건을 만족시키므로서 전기기계의 slot 영역 해석시와 유사한 모델을 설정하여 그림 3과 같이 요소분할 하였다. 여기서 절점수는 60 개, 요소수는 90개 이며 C-1 유한요소의 총 D.O.F.는 180개이고 미지 D.O.F.는 144개이다. 이때의 해석해는 다음 식으로로 주어진다.

$$A(x,y)=\sum_{i=1}\sum_{j=1} A_{ij} \cos m_i x \cos n_j y \qquad 10)$$

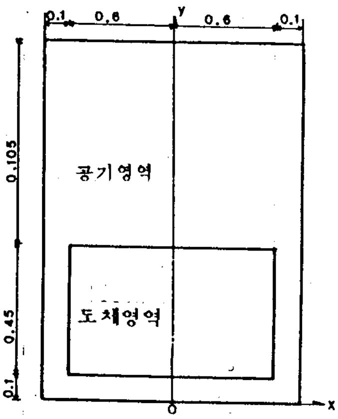

그림 2. 해 석 모 델

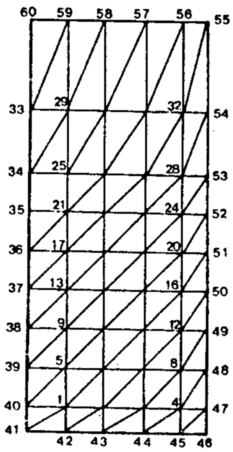

그림 3. 요 소 분 할 도

3-2. 해석 결과 및 검토

C-0 , C-1 유한요소법에 의해 구한 해를 식 10) 의 해석해와 비교하여 표 1), 2) 에 나타내었으며 식 4) 에서의 가중치 w 의 변화에 따른 오차를 그림 4에 도시 하였다.

표 1) Potential 값의 비교표

절점	해석해	C-0 해	C-1 해
5	.12287E-01	.12297E-01	.12288E-01
6	.12211E-01	.12215E-01	.12212E-01
7	.12076E-01	.12074E-01	.12077E-01
9	.11549E-01	.11547E-01	.11549E-01
10	.11480E-01	.11481E-01	.11481E-01
11	.11354E-01	.11358E-01	.11356E-01
14	.10238E-01	.10237E-01	.10238E-01
15	.10147E-01	.10155E-01	.10146E-01
17	.87854E-02	.87781E-02	.87847E-02
18	.87508E-02	.87503E-02	.87501E-02
19	.86985E-02	.87040E-02	.86978E-02
20	.86461E-02	.86534E-02	.86454E-02
21	.73023E-02	.72986E-02	.73018E-02
22	.72823E-02	.72820E-02	.72818E-02
23	.72551E-02	.72576E-02	.72546E-02
24	.72322E-02	.72350E-02	.72319E-02
25	.58329E-02	.58307E-02	.58325E-02
26	.58220E-02	.58215E-02	.58216E-02
27	.58082E-02	.58092E-02	.58078E-02

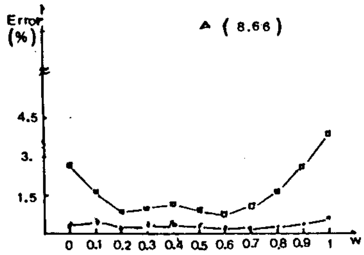

그림 4 가중치 w 의 변화에 따른 Potential 및 자속밀도의 오차

x : C-0 유한요소의 Potential 평균 오차
o : C-1 유한요소의 Potential 평균 오차
▲ : C-0 유한요소의 자속밀도 평균 오차
□ : C-1 유한요소의 자속밀도 평균 오차

표 2) 자속밀도 값의 비교표

절점	해석해	C-0 해	C-1 해
5	-.33179E-02	-.38472E-02	-.32740E-02
6	-.69401E-02	-.73387E-02	-.67991E-02
7	-.11464E-01	-.11806E-01	-.11335E-01
9	-.29860E-02	-.27039E-02	-.29845E-02
10	-.63318E-02	-.60332E-02	-.62976E-02
11	-.10768E-01	-.10060E-01	-.10428E-01
14	-.47829E-02	-.40298E-02	-.48905E-02
15	-.74676E-02	-.63554E-02	-.78300E-02
17	-.15749E-02	-.86114E-03	-.16118E-02
18	-.29911E-02	-.23911E-02	-.30451E-02
19	-.38104E-02	-.33162E-02	-.38524E-02
20	-.27106E-02	-.30066E-02	-.27140E-02
21	-.94788E-03	-.64397E-03	-.96956E-03
22	-.16691E-02	-.13571E-02	-.16930E-02
23	-.18259E-02	-.16707E-02	-.18477E-02
24	-.10873E-02	-.12767E-02	-.10806E-02
25	-.52770E-03	-.36592E-03	-.53926E-03
26	-.88186E-03	-.70510E-03	-.88695E-03
27	-.88862E-03	-.80336E-03	-.88682E-03

이상의 결과로 부터 다음과 같은 사실을 알 수 있었다.

1) C-0 유한요소법에서 게 변수는 Vector Potential 로 Potential 의 값은 만족스러운 결과를 얻었으나 Potential 의 미분 연산으로 계산되는 자속밀도는 그오차가 8.66% 로 나타났다. 그러므로 C-0 유한요소법으로는 정확한 자속분포 양상은 볼 수 있으나 전기기기의 중요 정수인 자속밀도는 오차가 매우 커 정확도를 높이려면 요소수를 증가 시켜야 한다.
2) 요소의 경계상에서 자속밀도의 연속성을 만족하는 C-1 유한요소법은 자속밀도를 게 방정식으로 부터 직접 구할 수 있었으며 Vector Potential 및 자속밀도의 오차는 각각 0.02 %, 0.84 %로 C-0 유한요소법과 비교할때 매우 만족스러운 결과를 얻었다.
3) L1L2L3를 보정하여 주는 가중치 w 는 Potential 의 정확도에는 거의 영향을 미치지 않으나 자속밀도의 계산에서는 w = 0.6 인경우 오차가 최소로 되었다. 따라서 자속밀도를 정확하게 계산하려면 $L_1L_2L_3$항의 보정이 필요 불가결하다.
4) 강제 경계조건이 주어진 경계의 인접 절점의 오차는 매우 커 이에대한 고찰이 시급하다.

4. 결 론

고 에너지 밀도의 전기기기 특성해석에 있어서 자속밀도 산출은 기존의 C-0 유한요소법으로는 문제점이 많아 본 연구에서는 요소의 경계상에서 자속밀도의 연속성을 만족하며, 지배방정식으로 부터 직접 구할 수 있는 새로운 유한요소법을 제안하였다.

C-1 유한요소법은 해석 영역을 상대적으로 크게 분할 하여도 높은 정확도를 갖는 자속밀도를 구할 수 있으므로 전기기기에 대한 특성 해석 및 개발, 설계시 와류 및 표피효과 등을 고려하여 본 방법을 적용하면 정확한 자속밀도 산출이 가능하여 Inductance 및 Torque에 대한 정도높은 규명이 가능하리라 본다.

참 고 문 헌

1) 임 달호 ,''전기계의 유한요소법'', 동명사,1987.
2) Koshi Itaka, Mikio Kaji, Takashi Hara ,''New Finite Element Field Calculation Technique in Which Contiuity of Electric Flux Is Satisfied.'', IEEE Trans. PAS-99, No. 6 , pp2102-2112, 1980.
3) D.C.Zienkiewicz,''The Finite Element Method.'', 3-rd ed., McGrow-Hill Book Co., New York, 1977.
4) Kenneth H. Huebner,'' The Finite Element Method for Engineering.'', 2-nd ed., John Wiley & Sons, 1982.
5) Erh-Rong. Wu,'' A Cubic Triangular Element with Local Continuity - An Application in Potential Flow.'', Int. Journal for Numerical Methods in Engineering., Vol. 17, pp 1147 - 1159, 1981.
6) K.G.Binns, P.J. Lawrenson,''Analysis and Computation Electric and Magnetic Field Problems.'', 2-nd ed.,Pergamon Press,1973.