MULTI-GRID 법을 이용한 전자장 수치해석에 관한 연구

○고 창섭 서울대학교*
이 기식 단국대학교
한 송엽 서울대학교

A Study on Electromagnetic Field Computation Using MULTI-GRID Methd

Chang-Seop Koh Seoul National Univ.
Gi-Shik Lee DANKUK Univ.
Song-Yop Hahn Seoul National Univ.

1. 서론.

유한요소법을 이용하여 경계조건을 갖는 편미분 방정식의 해를 구하고자 하는 경우 영역을 작은 요소로 분할하고, 연속계를 이산화하여 연립 방정식을 도출한후 이것을 풀어서 해를 구하게 된다. 그런데 해석하고자 하는 영역이 넓어지고, 경계형상이 복잡해짐에 따라 정확한 해를 얻고자 하면 필연적으로 요소수와 절점수가 증가하게 된다. 이에따라, 행렬이 대형화되고 계산시간이 엄청나게 증가하게 된다. 그런데, 유한요소법에서 생성되는 계수행렬이 매우 sparse 함을 고려 할때, 반복법은 0 이 아닌 계수만을 필요로 하므로 직접법에 비하여 필요한 컴퓨터 기억용량을 줄일 수 있다. 또한, 절점수가 늘어남에 따라 계산시간에서도, 반복법이 직접법에 비하여 유리함은 이미 알려진 사실이다.[7]

본 논문에서는 반복법을 이용한 "MULTI-GRID METHOD (다 격자법)" 을 새로이 도입하여 해를 빨리 구할 수 있는 방법을 제시하였다.

2. MULTI-GRID 법의 이론.

유한요소법에서 영역을 분할 할때 하나의 GRID 만을 정의하지 않고 순차적인 M 개의 GRID를 정의하고, 절점수가 작은 순서대로 각각 $G^1, G^2, G^3, \ldots G^M$ 라하고, 각 GRID 의 요소크기를 $h_1 > h_2 > h_3 > \ldots > h_M$ 이라고 하자. 영역내에서의 지배방정식과 경계 조건을 각각 적당한 미분 연산자 L 과 Δ 에 의하여

$$L U = F \quad \text{in} \quad \Omega$$
$$\Delta U = \Phi \quad \text{on} \quad \partial\Omega.$$

라고 하고, 이들을 GRID G^k 에서 이산화하면 연립 방정식

$$L^k U^k = F^k \quad (1 \leqq k \leqq M) \quad \text{------------} (1)$$

을 얻을 수 있다. 우리의 목표는 G^m 에서의 식(1)을 푸는 것이며 적당히 가정된 초기해 U_0^m 에 대하여

$$L^m U_0^m = F^m - f^m \quad \text{----------------------} (2)$$

으로 표현 될 수 있다. 여기서, f^m은 U_0^m이 정해가 아니기 때문에 생기는 항으로서, 잔차라고 부른다. 만일, 주어진 미분 방정식이 선형이면, 정해 U^m 은

$$U^m = U_0^m + V^m \quad \text{----------------------} (3)$$

으로 주어지며, 여기서 V^m 은 잔차방정식

$$L^m V^m = f^m \quad \text{----------------------} (4)$$

의 해이다. 따라서, 식 (4)를 풀어서 V^m을 구하면 정해 U^m을구할 수 있다. 그런데, 일반적으로 이것은 식 (1) 을 푸는 것만큼 어렵다. 따라서, 식 (4) 의 구동항 f^m을 f^{m-1}로 restriction[3]해서, G^{m-1} 에서

$$L^{m-1} V^{m-1} = I_m^{m-1} f^m \triangleq f^{m-1} \quad \text{--------------------} (5)$$

(단, I_m^{m-1}은 f^m을 f^{m-1}로 restriction 하는 연산자이다.) 를 풀어 V^{m-1}을 구하고 보간함수를 이용하여 prolongation[3]하면 V^m을 구할 수 있고, 식 (3) 을 이용하면 U^m을 구할 수 있는데, 이러한 과정을 defect correction 이라고 한다. 그런데 G^{m-1}의 절점수가 많으면 G^{m-1}에서의 식 (5) 를 푸는 일도 어

려워지므로 식 (5) 를 풀기 위하여 G^{m-1}, G^{m-2}에 대하여 defect correction 을 이용할 수 있고 같은 과정을 반복하면 $G^{m-1}, G^{m-2}, \ldots G^{1}$ 들을 이용하게 된다. 이와같이, 3개 이상의 grid 를 사용하며, defect correction 을 이용하여 푸는 것을 MULTI - GRID 법이라고 한다.

그런데, 초기해 U_{o}^{m} 를 보다 잘 주기 위하여, 그리고 prolongation 하는 과정에서 발생하는 error 를 없애기 위하여 smoothing 이 필요한 데 이들을 각각 pre-smoothimg, post-smoothing 이라고 한다. grid 가 3개인 경우의 작업흐름을 보면 그림 1.과 같다.(단, I 는 반복을, ↘는 restriction 을, ↗는 prolongation 을 뜻한다.)

```
Grid 3 --------III-----------III------------
                  ↘         ↗
Grid 2 ------------II-----II----------------
                     ↘   ↗
Grid 1 ---------------III-------------------
```

그림 1-a. V cycle.

```
Grid 3 ----IIII---------------------III------
               ↘                   ↗
Grid 2 ---------III-----III-----III----------
                   ↘   ↗   ↘   ↗
Grid 1 -------------III-----III--------------
```

그림 1-b. W cycle.

3. 사례 연구.

1) 모델.

본 논문에서는 그림 2.와 같이

$$
\begin{aligned}
-\nabla^2 U(x,y) &= 0 && \text{in } \Omega \\
U(x,y) &= \sqrt{r}\,\sin(\tfrac{1}{2}\theta) && \text{on } \Gamma_1 \\
\frac{\partial U}{\partial n} &= 0 && \text{on } \Gamma_2
\end{aligned}
$$

로 주어지는 계의 해를 구했다.

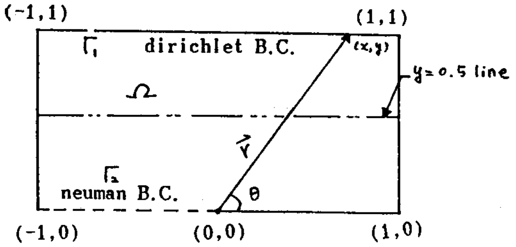

그림 2. 모델.

2) MESH

각 grid G^1, G^2, G^3 는 그림 3.과 같으며 G^1 은 요소수 16개, 절점수 15개, G^2 는 요소수 64개, 절점수 45개, G^3 은 요소수 256개, 절점수 153개로 구성되어 있다.

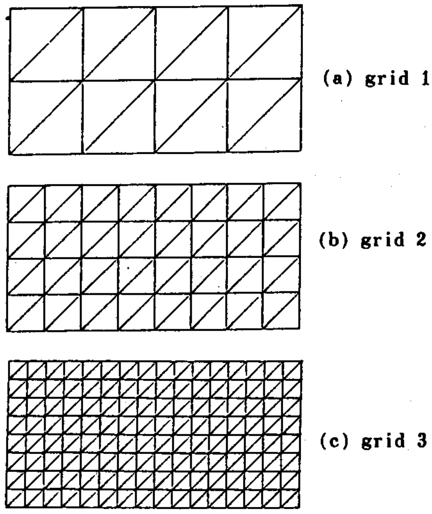

그림 3. MESH.

3) 결과.

전술한 smoothing 을 위해 Gauss - Seidel 법, S.O.R.법, B.C.G.법 등을 쓸 수 있다. 그림 4.에서는 Gauss-Seidel 법을 썼을 때 본 모델에서 y = 0.5 인 line 상에서 잔차가 줄어드는 과정을 보여준다. 실제로 smoothing 은 defect correction 과 결합하여 모든 error 를 빨리 없애야 한다. 그림 5.는 각각의 방법 들이 defect correction 과정과 결합하여 error norm 을 줄여나가는 과정을 비교하고 있다. 가장 좋은 결과는 S.O.R.에서 가속인수를 1.3 과 1.0 을 조합한 경우임을 알 수 있다. 1.4 의 경우는 계산시간에서 불리하였다.

그림 6.과 그림 7.은 V cycle 과 W cycle 을 비교한 것인데, 그림 7.에서 보듯이 본 모델의 경우 V cycle 이 더 유리했다. 일반적으로, grid 2 의 절점수가 많지 않은 경우 식 (4)는 G^2에서 빨리 수렴하므로 V cycle 이 효과적이나, G^1, G^2의 절점수가 증가함에 따라 W cycle 이 더 유리할 것으로 예상된다.

그림 8.은 기존의 반복법들과 MULTI-GRID 법으

로 풀었을 때, 시간의 경과에 따라 error norm 이 감소하는 모양을 나타내고있다. MULTI-GRID 법을 이용하는 경우가 다른 방법들보다 빨리 수렴함을 알 수 있다. 이러한 현상은 절점수와 요소수가 증가할수록 더욱 뚜렷할 것으로 예상 된다.

4. 결론.

본 논문은 유한요소법에서 MULTI-GRID 법과 SMOOTHING 과정을 적절히 조합함으로써 능률적으로 주어진 계를 풀수 있음을 보이고 있다. 따라서 실제 모델을 해석하고자 하는 경우, 컴퓨터의 기억용량과 계산시간이 문제시 됨을 고려할 때 본 논문에서 제시한 방법을 이용하면 능률적으로 실제 모델을 해석할 수 있을 것이다. 특히 적응요소 분할법 (Adaptive Mesh Refinement) 을 이용할 경우 grid G^k ($k \leq m$) 가 이미 형성돼 있으므로, 이 방법을 이용할 경우 아주 효과적일 것으로 사료 된다.

5. 참고 문헌 .

1. Wolfgang Hackbusch, "Multi-Grid methods and Applications".

2. F.de la Vallee Poussin, " An accelerated relaxation algorithm for iterative solutions of elliptic equations", SIAM J.NUMER.Anal., V.5, 1968, PP 340-351

3. A.Brandt, "Multi-Level adaptive solutions to boundary value problems", Math.Comp.,v.31, 1977, pp333-390

4. D.Braess and W.Hackbusch, "A New Convergence Proof for the Multigrid Method Including V-cycle", SIAM J.Numer.Anal., v.20 , (1983), pp967-975

5. Oden, " Finite Elements : An Introduction", Prentice-Hall, vol.1

6. Oden, " Finite Elements: Computational Aspects", Prentice- Holl, vol.3

7. T.Naksta, N. Takahashi and K. Fujiwara " Comparison between ICCG Method and Elimination Method for electromagnetic Field Analysis". 일본 전기학회, 제 6 회 전기.전자공학에의 유한요소법 응용 세미나.

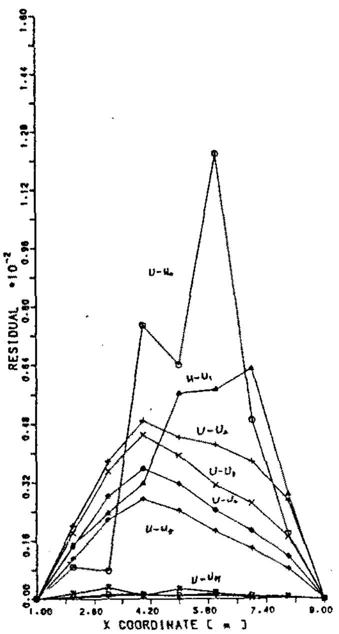

그림 4. smoothing 과정.

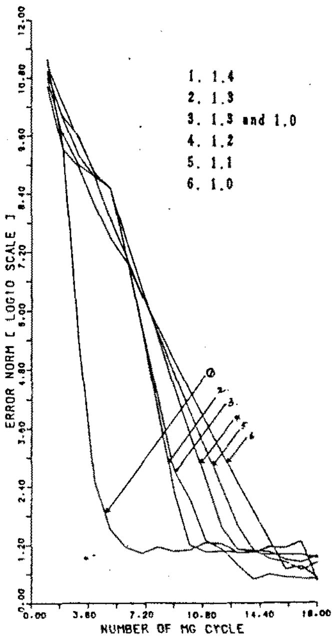

그림 5. S.O.R 법의 가속인수 비교

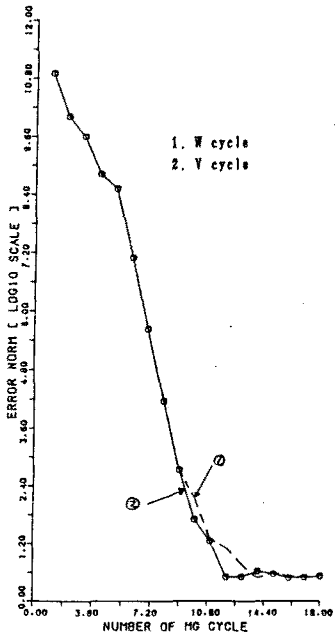

그림 6. W cycle 과 V cycle 비교 (1)

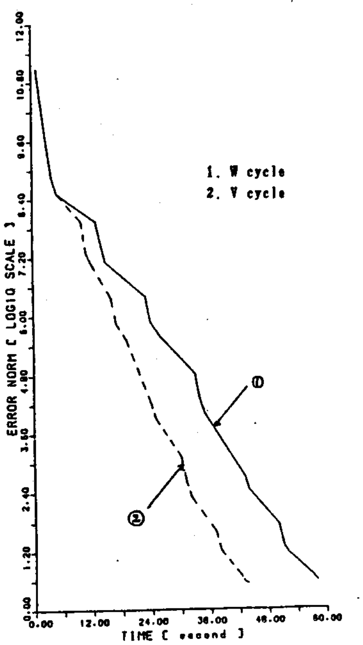

그림 7. W cycle 과 V cycle 비교 (2)

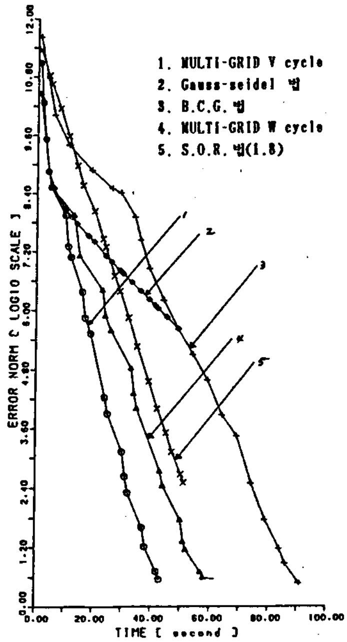

그림 8. 반복법들의 계산시간 비교.