Gutman 의 모델 간략화법을 개선하기 위한 새로운 파라미터의 제안

○은 성 수, 최 태 호
경북대학교 공과대학 전자공학과

The Proposition of the New Parameters to Improve Gutman's Model Reduction Method

○Sung Soo Eun and Tae Ho Choi
Department of Electronics, Kyung Buk National University

Abstract

A new method of model reduction, based on the differentiation of polynomials, is introduced by Gutman (1982). Without the reciprocal transformation, and the differentiation of the numerator and denominator polynomials of the transfer function, used by Gutman, the lower-order system can be obtained by the permutation of the order of numerator and denominator and the number of differentiation.

1. 서 론

선형 동적 시스템이론에서 시스템의 차수가 증가함에 따라 컴퓨터 시뮬레이션, 최적제어기와 적응제어기의 설계 및 해석, 궤환제어기의 특징이 복잡하여진다. 따라서 이러한 복잡성을 제거하고 저차수의 제어 입력을 얻기 위하여 저차수 모델을 구하는 것이 요구되어 왔다.[1]

저차수 모델을 구하는 방법들은 크게 시간 영역 간략화법과 주파수 영역 간략화법으로 나눌수 있다. 시간 영역 간략화법에는 완전 집성법(Exact Aggregation), Modal 집성법(Modal Aggregation), 섭동법(Perturbation Method)등이 있으며 주파수 영역 간략화법으로는 Pade 간략화법(Pade Approximation), 연분수 전개법(Continued Fraction Method), Routh 간략화법(Routh Approximation)등이 있다.[2-4]

Gutman(1982)은 주파수 영역 간략화법으로서 새로운 간략화법을 발표하였다. 이 방법은 계산 과정이 간편하고 불안정한 시스템과 Nonminimum Phase 시스템에 응용가능한 장점이 있으나 역수변환과정을 두번, 그리고 미분과정을 거쳐야 하는 단점이 있다.[5-6]

본 논문에서는 저차수 모델을 구하기 위해 Gutman이 제안한 미분 방법을 사용하였으나 두번의 역수변환과정과 미분과정을 거치지 않고서도 저차수 모델을 구할 수 있는 방법을 제안한다.

2. 이 론

저차수 모델을 구하기 위하여 주어진 전달 함수의 다항식의 차수를 줄이는 방법으로 미분을 사용하였다. 역수변환 과정을 거치지 않는 직접미분의 단점은 비우세근들이 우세근보다 더 잘 근사화된다. 따라서 이러한 문제는 역수변환, 미분 다시 역수변환의 과정을 거침으로써 해결이 된다.

단입출력 선형 시불변 시스템은 다음과 같다.

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t) \tag{1}$$

$$Y(t) = CX(t) \tag{2}$$

여기서 상태 변수 $X(t)$는 $n\times1$, A는 $n\times n$, B는 $n\times1$, C는 $1\times n$ 행렬이다.
식 (1), (2)의 동태 방정식의 전달 함수는 다음과 같다.

$$H(s) = C(sI-A)^{-1}B = \frac{b_0 s^{n-1} + b_1 s^{n-2} + \cdots + b_{n-1}}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n} \tag{3}$$

위의 전달함수를 역수변환하면

$$\hat{H}(s) = \frac{1}{s}H\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \cdots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0} = \frac{q(s)}{p(s)} \tag{4}$$

이렇게 변환된 $\hat{H}(s)$의 $p(s)$와 $q(s)$를 다음 식에 따라 차수를 줄일 수 있다.

$$p_{n-1}(s) = \frac{1}{n}\, p_n'(s) \tag{5}$$

$(n-r)$차의 저차수 시스템을 구하기 위하여 $H(s)$의 분모다항식 $p(s)$와 분자다항식 $q(s)$를 식 (5)에

의해 r번 미분하면

$$p_{n-r}(s) = a_n s^{n-r} + K_{r1} a_{n-1} s^{n-r-1} + \cdots$$

$$= \sum_{j=0}^{n-r} K_{rj}\, a_{n-j}\, s^{n-r-j} \qquad (6)$$

$$q_{n-r-1}(s) = b_{n-1} s^{n-r-1} + Q_{r1} b_{n-2} s^{n-r-2} + \cdots$$

$$= \sum_{j=0}^{n-r-1} Q_{rj}\, b_{n-1-j}\, s^{n-r-1-j} \qquad (7)$$

여기서 r은 미분의 횟수이며, K_{ij}와 Q_{ij}는 다음과 같이 주어진다.

$$K_{ij} = \frac{{}_{(n-j)}P_i}{{}_{n}P_i}$$

$$Q_{ij} = \frac{{}_{(n-1-j)}P_i}{{}_{(n-1)}P_i}$$

위의 과정으로 부터 구한 (n-r)차의 저차수 시스템은

$$\hat{H}_{red}(s) = \frac{\sum_{j=0}^{n-r-1} Q_{rj}\, b_{n-1-j}\, s^{n-r-1-j}}{\sum_{j=0}^{n-r} K_{rj}\, a_{n-j}\, s^{n-r-j}} \qquad (8)$$

그런데 $\hat{H}_{red}(s)$는 역수변환된 시스템이므로 다시 역수변환을 하여야 한다. 따라서 구하고자 하는 저차수 모델은 다음과 같다.

$$H_{red}(s) = \frac{\sum_{j=0}^{n-r-1} Q_{rj}\, b_{n-1-j}\, s^{j}}{\sum_{j=0}^{n-r} K_{rj}\, a_{n-j}\, s^{j}} \qquad (9)$$

본 논문의 알고리즘은 두번의 역수변환과 미분과정 그리고 정규화과정을 거치지않고, 미분횟수에 의해 결정되는 순열형태인 K_{ij}, Q_{ij}와 그리고 원 시스템의 계수들 중 일부만으로 원하는 차수의 저차수 모델을 구할 수 있다. 이와 같은 알고리즘을 도식적으로 나타내 보면 그림 1과 같다.

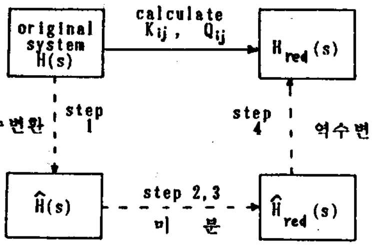

그림 1. 미분과정에 기초한 저차화과정의 블럭 다이어그램

3. 예 제 및 시뮬레이션

예제로써 8차 시스템을 저차화하도록 한다.

$$H(s) = \frac{35s^7+1086s^6+13285s^5+82402s^4+278376s^3+}{s^8+33s^7+437s^6+3017s^5+11870s^4+27470s^3+}$$
$$\frac{511812s^2+482964s+194480}{37492s^2+28880s+9600}$$

그림1의 네 단계를 거친 [5]의 5차 시스템 및 2차 시스템은 아래와 같다.

$$H_5(s) = \frac{8}{5}\ \frac{494412s^4+6681024s^3+30708720s^2+57955680s+}{18102s^5+284880s^4+1648200s^3+4499040s^2+}$$
$$\frac{40840800}{6064800s+3225600}$$

$$H_2(s) = 4\,\frac{347734080s+980179200}{26994240s^2+145555200s+193536000}$$

그러나 본 연구의 방법에 의하면, 위의 8차 시스템을 5차 시스템으로 저차화하기 위해서는 미분을 3번 하여야 하므로, 분모의 경우 s^8, s^7, s^6 차항의 계수들을 고려치 않고 s^5, s^4, s^3, s^2, s^1 차항의 계수들만으로 저차화된 시스템의 분모다항식을 구할 수 있다. 또한 분자의 경우 s^4, s^3, s^2, s^1 차항의 계수들만으로 저차화된 시스템의 분자다항식을 구할 수 있다. 따라서 구하고자 하는 5차 시스템은 다음과 같이 구해진다.

$$H_5(s) = \frac{82402Q_{34}s^4+278376Q_{33}s^3+511812Q_{32}s^2+4829640Q_{31}s+}{3017K_{35}s^5+11870K_{34}s^4+27470K_{33}s^3+37492K_{32}s^2+}$$
$$\frac{194480}{28880K_{31}s+9600}$$

여기서 순열로 결정되는 K_{ij}, Q_{ij}를 구하면, 구하고자 하는 5차 시스템은 다음과 같다.

$$H_5(s) = \frac{2354.343s^4+31814.4s^3+146232s^2+275979.429s+}{53.875s^5+847.857s^4+4905.357s^3+13390s^2+}$$
$$\frac{194480}{18050s+9600}$$

또한, 2차 시스템을 구하고자 하면

$$H_2(s) = \frac{482964Q_{61}s+194480}{37492K_{62}s^2+28880K_{61}s+9600}$$
$$= \frac{68994.857s+194480}{1339s^2+7220s+9600}$$

위의 5차 시스템과 2차 시스템은 [5]의 결과와 일치한다. 따라서 원 시스템과 축소 시스템의 극-영점 배치 및 안정도 문제는 [5]의 결과와 동일하다. 원 시스템과 5차 시스템 및 2차 시스템의 단위 계단함수입력에 대한 출력은 그림2와 같다.

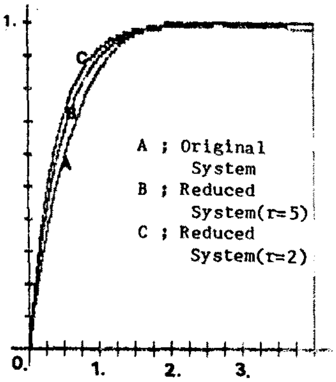

Fig 2. 단위 계단 함수 응답

4. 결론

본 연구에서는 Gutman이 제안한 다항식의 미분에 기초한 모델 간략화법을 개선하였다. 이 방법은 복잡한 역수변환과정과 미분 과정을 거쳐야 하는 단점이 있었다. 그러나 본 논문에서는 Gutman 방법의 결과가 규칙성을 갖는데 착안하여 위의 역수변환과정 및 미분과정을 거치지 않고서도 Gutman 방법과 같은 결과를 얻을 수 있는 순열형태의 파라미터를 제안하여 Gutman 방법의 단점을 제거하였다.

참고 문헌

1. S. S. Lamba and S. V. Rao, "Aggregation Matrix for the Continued Fraction Expansion Model of Chen and Siegh," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-23, pp.81-83, 1978, Feb.
2. 권욱현, 이종수 "대규모 시스템 연구 동향", 대한전기학회지, vol.33, No.3, pp.4-12, 1984, Mar.
3. M. Jamshid, Large-Scale Systems : Modeling and control, North-Holland, pp.7-10, 66-67, 1983.
4. 김성중, "시간영역 Routh 간략화법에 대한 연구", 박사학위논문, 공학과, 전남대학교, 1984.
5. P. O. Gutman, C. F. Mannerfelt, and P. Molander, "Contributions to the model reduction problem," IEEE Trans. Automat. Contr. ,vol. AC-27, pp. 454-455, 1982, Apr.
6. A. Lepschy and U. Viaro, "A note on the Model Reduction," IEEE Trans. Automat. Contr. ,vol. AC-28, pp. 525-527, 1983, Apr.