Wheel의 Graceful Numbering에 관한 연구

°김 대식, 이 천희　　　이 명희, 박 준열
청주대학교　　　　홍익대학교

A Study on the Graceful Numberring of Wheels

Kim. Daesik　Yi. Cheonhee　　Yi. Myonghee　Park. Junyoul
Chongju University　　　Hongik University

Abstract

In this paper, we give an overview of harmonious graphs and graceful graphs, identify the simply sequential and survey graceful graphs of wheels.

Finally, we describe β-valuation of wheels which can be used in graceful numbering.

I. 서 론

Ringel(1), Rosa(2)가 n개 정점을 가진 그래프의 numbering에 대하여 연구를 시작한 이래 많은 사람들에(3-6) 의하여 연구가 진행되었고 Golomb(3)이 graceful이란 용어를 사용한 이래 loop나 중복 edge가 없는 undirected 그래프에 graceful numbering하는 문제가 체계적으로 연구되었다. Graceful numbering이 가능한 그래프에는 Caterpillars, snakes, Complete bipartite 그래프, Polyomino, prisms, 특수한 Isomorphic cycles 등이있다.

오늘날 graph theory에서 graceful numbering algorithm에 관한 연구가 활발해지고 있으며 이의 응용범위도 X-ray crystallography, Nonperiodic codes, Nonnatural encoding, Small communication networks, Piccard's theorem 등에 응용되고 있으며 앞으로 최적회로 설계와 데이타 구조에도 응용될 전망이다.

따라서 본 논문에서는 비슷한 성질을 갖지만 각각 독립적인 harmonious 그래프와 graceful 그래프에 대하여 고찰하고 simply sequential의 특성을 확인하여 wheel의 β-valuation을 하는데 응용하였다.

II. Harmonious 그래프와 Graceful 그래프

Harmonious 그래프의(7) 정의를 내리기 전에 그 추론과정을 살펴보면 다음과같다.

만일 S가 n크기의 S_t-set이고 modulus m이라면 다음식이 성립한다.

$$m \geq \binom{n}{t} \qquad (2-1)$$

설명을 간단히 하기위하여 (2-1)식에서 t=2 인 경우와 n=2,3,4 인 경우의 예를 들면 다음과 같다.

S={0,1}　　n=2 , m=1
S={0,1,2}　　n=3 , m=3
S={0,1,2,4}　　n=4 , m=6 ,

만일 K_n의 정점(vertex)을 분류하는 것이 가능하다면 S는 n 크기의 S-set이며 modulus $\binom{n}{2}$인 경우이다. S 요소를 가진 n 정점 Complete 그래프에서 K_n의 각 edge에 그 edge 양쪽 정점의 값의 modulo $\binom{n}{2}$의 합이 할당된다면 모든 edge의 값은 다르게된다.

그림 2-1은 이와 같은 성질을 가진 세개의 extremal set S에 대응하는 분류된 complete 그래프이다.

따라서 다음의 정의가 성립한다.

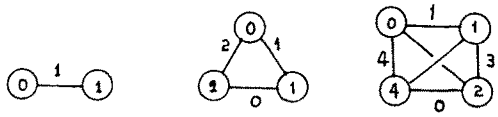


그림 2-1

(정의 2-1) 만일 Ze(정수 modulo e)라는 성질이 다른 값을 갖는 그래프 G의 정점들을 분류하는 것이 가능하고 Ze의 모든 요소가 G의 edge 합이 된다면 e edge를 가진 그래프 G를 harmonious 그래프라 한다.

(예 2-1) 그림 2-2는 7개의 정점과 17개의 edge를 가진 harmonious 그래프의 예이다.

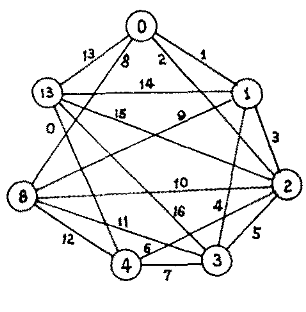


그림 2-2 Harmonious 그래프

(예 2-2) 그림 2-3은 많아야 5개의 정점을 갖는 연결된 그래프로서 harmonious가 아닌 경우이다.

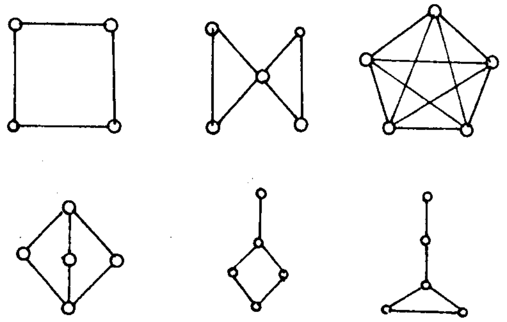


그림 2-3 Nonharmonious 그래프

P_e 를 평면에 삽입된 변과 각이 같은 e-각형(e-gon)이라하자. 그러면 그래프 G의 정점들이 P_e 의 정점들에 삽입될 수 있고 그래서 G의 삽입된 copy의 두 edge가 평행이 아닐때 G는 harmonious 그래프이다.

이것은 P_e 의 정점들이 0, 1, ... e-1처럼 주기적으로 분류되어서 i와 j에 합치는 현(chord)의 방향이 i+j(mod e)에 달렸다는 사실로부터 알 수 있다.

Graph theory 에서 harmonious와 관련된 개념으로서 graceful 그래프가(3, 5) 있으며 다음의 정의는 이의 성질을 나타내고있다.

(정의 2-2) 만일 {0, 1, . . . e}의 성질이 다른값을 G의 정점들에 할당하는것이 가능하고 edge 차이 들의 절대값이 모두 다르다면 e edge 를 가진 그래프 G는 graceful 그래프라 한다

(예 2-3) 그림 2-4는 graceful 그래프의 예이다.

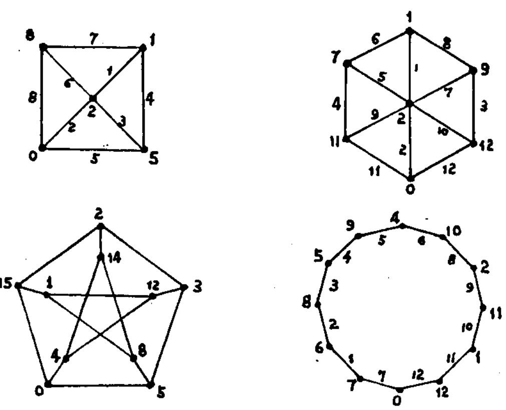


그림 2-4 Graceful 그래프의예

(예 2-4) 그림 2-5는 5개 정점을 가진 non-graceful 그래프의 예이다.

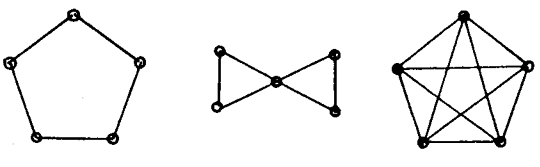


그림 2-5 Nongraceful 그래프의 예

그림 2-3과 2-5는 두개의 같은 그래프를포함하고 있으나 graceful과 harmonious의 개념은 독립적이다. 예로서 길이 n인 주기의 특성은 표 1과 같다.

표 2-1

n (mod 4)	harmonious	graceful
0	x	0
1	0	x
2	x	x
3	0	0

또한 graceful인 complete bipartite 그래프들도 다음 정리에서와같이 harmonious가 될 수 없다.

(정리 2-1) K_{rs} 는 harmonious가 아니다.

(증명) K_{rs} 의 harmonious labelling이 존재한다고 가정하면 이것은 A와 B가 $|A| = r$ 와 $|B| = s$인 Z_{rs} 의 놓여진 subset인 곳에서 $Z_{rs} = A \oplus B$의 직접분해 합에 상당한다. a+b (modulo rs), $a \in A$, $b \in B$ 모두가 별개이기 때문에 a+b(modulo rs)도 별개이다. 그러나 $|A||B| = rs$ 차이점이 있다. 따라서 a-b=0인 경우가 한번 발생하며 그런 까닭에 A와 B는 떨어져 있지않다.

n 정점을 가진 harmonious 그래프와 graceful 그래프에서 최대 edge수를 구해보면 표 2-2와 같다.

표 2-2

n	H(n)	G(n)
2	1	1
3	3	3
4	6	6
5	9	9
6	13	13
7	17	17
8	24	23
9	30	29
10	36	36

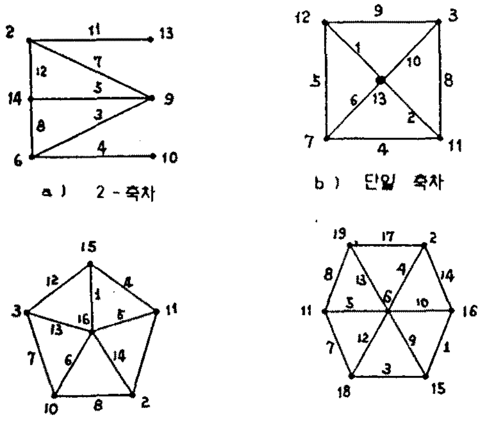
III. Simply sequential과 Graceful 그래프

어떤 그래프에서 전단사(bijection)이 존재한다면 각 edge는 E(G)에서 $\vec{e} = xy$이고 $h(\vec{e}) = |h(x) - h(y)|$ 인 $V(G) \cup E(G) \longrightarrow \{1, 2, \ldots, n\}$이 되며 $|V(G) \cup E(G)| = K$인 그래프 G를 단일축차(simply sequential)라 한다.

동일한 조건을 만족하는 그래프 중에서 전단사 h가 1이 아닌 임의의 값 k로 부터 시작할 때, 즉 $\{k, k+1, k+2, \ldots, k+n\}$일때 k-sequential이라(8, 9) 한다.

그림 3-1은 sequential numbering을 갖는 그래프의 예이다.

이러한 sequent al 그래프의 개념에서 한 단계 더 나아가 모든 wheel는 graceful 이라는 추론이 가능하며 Höede 와 Kupıer(10) 에 의해서 증명되었다.



a) 2-축차 b) 단일 축차 c) 단일 축차 d) 단일 축차

그림 3-1 sequential numbering

여기서 wheel은 cycle(한번 통과한 정점은 통과하지 않고 시작점에 귀환하는 그래프)의 모든 정점에 연결된 새로운 정점과 edge들을 추가하여 cycle로 부터 만들어지는 그래프를 가리킨다. 또한 wheel의 새로운 edge를 spoke라 한다.

Graceful 그래프와 sequential 그래프는 정의 및 이론 전개에 있어서 유사한점이 상당히 많으며 그림 3-2에 나타난 것처럼 정리 3-1은 cycle C_n 이 1-sequential 일때 wheel V_{n+1}은 graceful임을 보여준다.

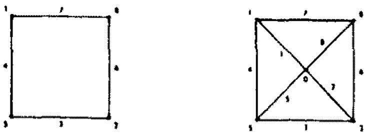


그림 3-2. C_4 와 V_5 의 대응

(정리 3-1) 그래프 G가 1-sequential이면 G+v는 graceful이다

(증명) 먼저 $|E(G+v)| = |V(G)| + |E(G)|$ 라고 놓고 정점 v에 0을 할당함 으로써 간단히 V(G)의 numbering을 확장한다. G+v 에서 G의 각 edge는 $f(\bar{e})$와 같은 값을 가지며 $\bar{e}=(u,v) \in E(G+v)$이면 G+v에서 $f(\bar{e})$는 G에서 f(u)와 같다. 그러므로 G+v의 graceful numbering을 갖는다.

IV. Wheel의 β-valuation

그래프 C_p (=cycle, polygons, circuits). 즉 p정점을 가진 다각형은 $p \equiv 0$이거나 $p \equiv 3 \pmod 4$이면 graceful이다. 이런 그래프에서 p=q 이므로 0,1,2,....,q 중에서 한 수는 β-valuation에서 정점 number로 사용되지 않으며 그림 2-4 d)는 3이 생략된 12각형의 graceful numbering 의 예이다.

$P \equiv 0$ 또는 $P \equiv 3 \pmod 4$이 성립할 때 C_p 의 β-valuation은 비슷한 방식으로 얻어지며 4-1식과 같이 시작된다. 그러나 $\lceil (p+1)/4 \rceil$ number는 사용되지 않는다.

$$0,\ p,\ 1,\ p-1,\ 2,\ p-2,\ldots \quad (4-1)$$

Golomb(3)은 β-valuation이 가능한 wheel 중에서 7정점까지 Wheel에 대한 graceful numbering을 구하였으며 Hebbare(11)가 13정점 까지 확장시킨 후 모든 Wheel은 graceful하다고 추정하였다.

Wheel V_p 는 corona $K_1 \odot C_n$ 이다.

즉 $n \geq 3$인 n각형에 중심을 더한 결과로서 p는 n+1정점과 q는 2n edge를 갖는 그래프가 된다. 다시 말해서 n+1 번째 정점은 n각형의 n 정점들에 인접해있다. 또한 Wheel V_{n+1} 은 기본이 n각형인 피라밋의 골격과 같은 특성을 가진다.

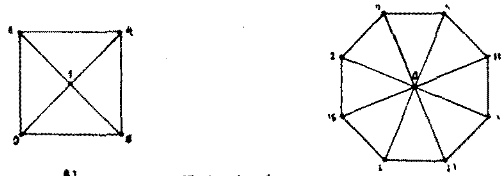
이 장에서 v_0 는 항상 wheel중심이며, n각형 정점들의 순서가 정해진 순차는 $v_1, v_2, \ldots, v_n$ 이다. (지정된순서의 의미는 (v_1, v_2), (v_2, v_3)... ..(v_{n-1}, v_n),(v_n, v_1)이 V_{n+1} 의 edges와 같이 n각형의 변을 형성하는것을 나타낸다.)

(정리 4-1) Wheel은 graceful 그래프이다.

(증 명) n의 짝수, 홀수값의 경우로 나누어 고려하는것이 편리하다.

1. $n \equiv 0 \pmod 2$라 하자.

n=4에 대해 Glomb은 β-valuation을 구하였다(11).



a) 그림 4-1 b)

n>6에 대해서 다음 공식이 graceful numbering을 부여한다.

$$f(v_i) = \begin{cases} 2n-i-1, & (i=2,4,6,\ldots,n-2) \\ 2, & (i=n-1) \\ i, & (i=1,3,5\ldots n-3,\ \text{또는}\ i=0) \\ 2n, & (i=n) \end{cases}$$

그림 4-1 b)에서 n=8인 그래프의 β-valuation을 구할 수 있다.

2. $n \equiv 1 \pmod 2$라 하자

n=3에 대해 wheel W_4 는 graceful인 complete 그래프 k_4 이다. 실제로 -valuation은 W_4 의 정점들에 임의의 순서로 0, 1, 4, 6 또는 보수(complementary number) 0, 2, 5, 6을 할당함으로 구해진다.

$n \geq 5$에 대해 다음 공식으로 β-valuation을 구한다.

$$f(v_i) = \begin{cases} 2i, & (i=0,\ 1,\ \text{또는}\ n) \\ n+i, & (i=2,4,6,\ldots,n-1) \\ n+1-i, & (i=3,5,7,\ldots,n-2) \end{cases}$$

n=7에 대해 그림 4-2 a)에서 처럼 Graceful numbering을 구할 수 있다.

(정리 4-2) v_k 는 V_p 의 임의의 정점이라고 하면 $f(v_k)=0$와 같은 V_p 의 β-valuation이 존재한다.

(증 명) 정리 4-1의 β-valuation에서 $f(v)=0$ 이므로 $k \neq 0$인 경우만 고려된다.

정리 4-1 의 두 식으로부터 이와 같은 β-valuati

on이 구해진다.

$$f(v_n)=2n \qquad (4-3)$$

그러므로 보수 numbering 인 (4-4)식으로부터

$$\bar{f}(v_i)=2n-f(v_i),\quad i=0,1,2,\ldots,n \qquad (4-4)$$

$\bar{f}(v_n)=0$가 구해지는데 이것은 v_n과 일치하는 $v_k \neq v_o$인 어떤 정점의 적절한 회전에 의해서 얻어진다.

a)　　　　　　　　　　　　　b)

그림 4-2

(정리 4-3) 중심에 할당된 $f(v_o)=n$ 값을 갖는 W_{n+1}의 β-valuation은 존재할 수 없다.

(증 명) 이러한 β-valuation에서 edge number $q=2n$(즉 end labels 0와 $2n$)을 갖는 edge는 n각형의 변이고 그림 4-2 b) wheel 내에 부그래프 k 을 만들어 준다. 그러나 이 부 그래프 내에 graceful numbering 에서는 불가능한 동일한 edge number n을 갖는 2개의 edge가 존재한다.

(정리 4-4) n이 홀수이면 $f(v_k)=2$인 값을 임의의 정점 v_k에 할당하는 W_{n+1}의 graceful numbering이 존재한다.

(증 명) β-valuation을 나타내는 W_4의 정점들의 임의의 순서에 할당되는 number인 0, 2, 5, 6에 관해서는 앞에서 언급하였다.

$n=5, 7, 9, \ldots$에 대하여 식 4-2는 $f(v_1)=2$와 같은 W_{n+1}의 graceful numbering이 존재함을 보증한다.

중심에 $f(v_i)=2$를 할당하는 β-valuation이 존재하는 것을 나타낸다. 그러나 그러한 β-valuation은 식 4-2에서 labels 0, 2, 2n을 주기적인 순열배치에 의해 구할 수 있다. 따라서 다음 공식이 성립한다.

$$f(v_i)=\begin{cases} 2, & (i=0) \\ 2n, & (i=1) \\ n+i, & (i=2,4,6,\ldots,n-1) \\ n+1-i, & (i=3,5,7,\ldots,n-2) \\ 0, & (i=n) \end{cases} \qquad (4-5)$$

$f(v_o)=2$이며 n이 짝수값을 가질때의 β-valuation을 n이 4, 6, 8일때를 그림 4-3에 나타내었다.

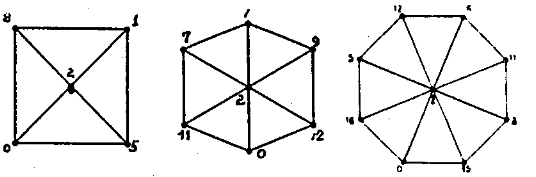


그림 4-3

V. 결 론

본 논문에서는 harmonious 그래프, simply sequential 그래프와 graceful 그래프 간의 상호 연관관계에 대하여 정의하고 graceful numbering이 가능한 그래프군들 중에서 Wheel의 -valuation에 대하여 여러가지 경우에 대해 구하고 wheel이 graceful 그래프임을 입증하였다.

어떤 그래프가 graceful numbering이 가능한지는 쉽게 알 수 있으나 그 그래프 군의 모든 경우가 전부 가능한지에 대해서 증명하기는 어렵다. 본 논문에서도 Wheel의 graceful numbering을 여러가지 경우에 대하여 구하였으나 $f(v_o)$가 2이며 n이 10, 12, 14....일 때와 $f(v_o)$가 1이며 n이 4, 5, 6, 10 이외에 다른경우 일때에 대해서는 구하지를 못하였다. 따라서 wheel에서의 graceful numbering의 확장에 대한 연구에서는 $f(v_o)$가 3이상인 경우와 $f(v_o)$가 1, 2일때 모든 n값에 대해서 graceful numbering의 가능여부에 대한 연구가 뒤따라야 할것이다. 또한 이러한 특성을 이용하여 최적 회로 설계분야의 면적 최적화에도 사용하는 연구가 필요하다.

Reference

1. Ringel,G., " Problem 25," Theory of Graphs and Its Applications, Proc. Symposium Smolenice, Prague, pp.162,1963.
2. Rosa,A., " On certain valuation of vertices of a graph," Theory of Graphs, Proc. Internat. Symposium Rome(ed., P. Rosentiehl) Dunod., Paris, pp.349-355, 1968.
3. Golomb,S.W., How to Number a Graph, Graph Theory and Computing(ed., R.C.Read), Academic Press, New York, pp.23-37,1972.
4. Golomb,S.W., " The largest graceful subgraph of the complete graph," American Math. Monthly, vol. 81, pp.499-501,1974.
5. Bloom,G.S., and Golomb,S.W., " Applications of numbered undirected graphs," Proc. of the IEEE vol. 65, no. 4, pp.562-570, 1977.
6. Bloom,G.S., A Chronology of the Ringel-Kotzig conjecture and the continuing quest to call all trees graceful, Ann. N.Y. Acad. Sci., 1979.
7. R.L. Graham, N.J.A. Sloane, " On constant weight codes and harmonious graphs," STAN-CS-79-777, Stanford University, 1979.
8. D.W. Bange, A.E. Barkauskas, P.J. Slater, " Simply sequential and graceful graphs," Proc. 10th S-E Conf. Combinatorics, Graph theory, and Computing, pp.155-162, 1980.
9. Tom Grace, " On sequential labelings of graphs," J. of Graph theory, vol. 7, pp. 195-201, 1983.
10. Höede,C., Kuiper,H., " All wheels are graceful," Memorandom no. 147 of Technishe Hogeschool-Twente.
11. Hebbare,S.P.R., " Graceful cycles," Utilitas Math. 10, pp.307-317, 1976.