

비선형 미분방정식의 해석을 위한 볼테라 커널의 계산

○ 성 단 근

한국과학기술대학 전자·전산학부

Calculation of Volterra Kernels for the Analysis of
Nonlinear Differential Equations

SUNG, DAN KEUN

Korea Institute of Technology

Abstract

The input-output relation for nonlinear systems can be explicitly represented by the Volterra functional series and it is characterized by the Volterra kernels.

A block diagram reduction method is proposed to determine the Volterra kernels and is compared with the direct substitution technique.

The former method can significantly reduce the computational complexity.

I. 서론

많은 자연 현상은 비선형의 특성을 나타내는 비선형 시스템이라 볼 수 있다. 이 비선형 시스템을 선형화(linearization)하여 부분적으로 해석할 수 있으나 전체를 해석하는 데는 미흡하다. 선형 시스템 이론은 1970년대에 대부분 정립되어 있으나 비선형 시스템의 이론 정립은 아직 유아기에 불과하며 현대 과학기술의 대부분의 분야에서 한계 또는 장벽은 비선형 문제로 귀착하며 이러한 비선형 문제의 해석 및 해결이 과학기술의 진보에 필수적인 요건이며 앞으로 풀어가야 할 과제이기도 하다.

Taylor 시리즈의 functional으로의 확장으로 Vito Volterra [1]가 1910년 경에 무한의 functional series를 도입하였는데 그 후에 이 시리즈는 Volterra functional series 또는 Volterra series라 불리어진다. 이 시리즈는 Wiener에 의해 처음 비선형 시스템을 나타내는 데 사용되었으며 백색 가우시안(White Gaussian) 입력에 대하여 Orthogonal Wiener functional series [2]로 발전되었다.

그후 본격적으로 Volterra functional series에 대한 연구는 1950년 대말 부터 시작되었고 [3, 4, 5], 1960년대 중반부터 각 분야에 이 볼테라 시리즈가 활발히 응용되 가고 있다. 주요한 응용분야의 예는 통신 [6], 회로 [7, 8, 9, 10], viscoelastic material [11, 12], eigenvalue 문제 [13], 역학시스템 [13] 그리고 인식 (Identification) 문제 [14] 등이다.

본 논문에서 비선형 미분방정식의 입력-출력의 상관관계를 나타내는 볼테라 커널의 계산을 위해 직접대입법이 논의되고 연속적인 근사방법에 의한 블록도 구성에 따른 블록도 축소방법이 새로 제안되어 서로 비교되고 아울러 볼테라 커널로부터 직접 미분방정식의 해를 구하는 방식도 제시된다.

II. 볼테라 커널의 계산

일반적으로 시변 비선형 시스템 (time-varying nonlinear systems)은 입력(자극)을 $x(t)$, 출력 (반응 또는 응답)을 $y(t)$ 로 할때 아래와 같은 무한 시리즈의 형태를 가진 볼테라 시리즈에 의해 나타내어질 수 있다.

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} H_n(t, x(t)). \tag{2.1}$$

여기서

$$H_n(t, x(t)) = \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} h_n(t, t_1, t_2, \dots, t_n) x(t_1) \dots x(t_n) dt_1 \dots dt_n. \tag{2.2}$$

H_n 는 n차 볼테라 연산자이며 $h_n(t, t_1, \dots, t_n)$ 은 n차 볼테라 커널이라고 불리어지며 시변 비선형 시스템이므로 볼테라 커널도 시간 t에 따라 다른 특성을 가지게 된다. 특히, $h_1(t, t_1)$ 은 선형 임펄스 응답에 해당한다.

시불변 비선형 시스템 (time-invariant nonlinear system)을 고려해 보자. 입력을 $x(t)$ 로 하고 출력을 $y(t)$ 라 할 때, 입력과 출력과의 관계는

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} H_n[x(t)] \quad (2.3)$$

로 주어지며, 여기서

$$H_n[x(t)] = \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} h_n(t_1, t_2, \dots, t_n) x(t-t_1) \dots x(t-t_n) dt_1 \dots dt_n. \quad (2.4)$$

H_n 은 n 차 볼테라 연산자이며 $H_n[x(t)]$ 는 n 차원의 일반화된 convolution 적분 형태로서 n 차 볼테라 커널.

$h_n(t_1, t_2, \dots, t_n)$ 에 n 개의 입력(forcing inputs)의 곱으로 나타내어진다. $h_1(t_1, t_2, \dots, t_n)$ 은 또한 일반화된 n 차의 임펄스 응답에 해당한다.

아래와 같은 상미분방정식(ordinary differential equation)의 형태로 나타낼 수 있는 시불변 비선형 시스템을 고려해 보자.

$$L[y(t)] + F[y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)] = x(t). \quad (2.5)$$

여기서 L 은 선형 미분연산자이고, F 는 비선형 연산자이며 모든 초거조건은 0(zero)로 가정한다. 이러한 일반적인 형태의 미분방정식의 해를 구하기 위한 하나의 방법으로 볼테라 시리즈의 형태의 가정된 식 (2.3)을 식 (2.5)에 대입하여 볼테라 커널을 계산하는 것으로 직접대입법(Direct substitution method) [5]이라 부를 수 있다. 이 방법에 의해 볼테라 커널을 구하기 위해

- 볼테라 시리즈의 가정된 해를 미분방정식에 대입한다.
- 항등식을 만족시키기 위해 $x(t)$ 의 각종 functional에 대한 계수부분을 영(zero)로 한다.

- 구해진 일련의 조건식에서 낮은 차수의 볼테라 커널로부터 순차적으로 구한다.

구체적인 예로서, 아래의 비선형 미분방정식을 고려해보자.

$$\dot{y}(t) + y(t) + ay^2(t) = x(t), \quad y(0) = 0. \quad (2.6)$$

위에서 언급한 방법에 의해 순차적인 일련의 조건식이 유도된다.

$$x(t) : h_1(0) = 0. \quad (2.7)$$

$$\int_0^t dt_1 x(t-t_1) : \frac{dh_1(t)}{dt} + h_1(t) = 0. \quad (2.8)$$

$$x(t) \int_0^t dt_1 x(t-t_1) : h_2(t_1, 0) + h_2(0, t_1) = 0. \quad (2.9)$$

$$\int_0^t \int_0^{t_1} dt_1 dt_2 x(t-t_1) x(t-t_2) : \frac{\partial h_2(t_1, t_2)}{\partial t_1} + \frac{\partial h_2(t_1, t_2)}{\partial t_2} + h_2(t_1, t_2) + ah_1(t_1)h_1(t_2) = 0. \quad (2.10)$$

$$x(t) \int_0^t \int_0^{t_1} dt_1 dt_2 x(t-t_1) x(t-t_2) : h_3(0, t_1, t_2) + h_3(t_1, 0, t_2) + h_3(t_1, t_2, 0) = 0. \quad (2.11)$$

$$\int_0^t \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} dt_1 dt_2 dt_3 x(t-t_1) x(t-t_2) x(t-t_3) : \frac{\partial h_3(t_1, t_2, t_3)}{\partial t_1} + \frac{\partial h_3(t_1, t_2, t_3)}{\partial t_2} + \frac{\partial h_3(t_1, t_2, t_3)}{\partial t_3} + h_3(t_1, t_2, t_3) + 2ah_1(t_1)h_2(t_2, t_3) = 0. \quad (2.12)$$

식 (2.7), (2.8)에서 $h_1(t)$ 는 구해진다.

$$h_1(t) = e^{-t}. \quad (2.13)$$

볼테라 커널의 대칭성을 이용하고 식 (2.10)을 다차원 Laplace 변환하여 2차 볼테라 커널의 다차원 라플라스 영역에서의 값은

$$H_2(s_1, s_2) = \frac{-a}{(s_1 + s_2 + 1)(s_1 + 1)(s_2 + 1)}. \quad (2.14)$$

이 다차원 라플라스의 역변환을 하면 $h_2(t_1, t_2)$ 가 구해진다.

$$h_2(t_1, t_2) = ae^{-t_1}u(t_2-t_1)[1-e^{-(t_1-t_2)}] - ae^{-t_1}u(t_2) + ae^{-(t_1+t_2)}u(t_2). \quad (2.15)$$

여기서 $u(t)$ 는 단위 스텝함수이다.

같은 방식으로 3차 볼테라 커널도 계산할 수 있다.

$$h_3(t_1, t_2, t_3) = a^2 [e^{-(t_3-t_2)} - e^{-(t_3-t_2)}]u(t_3-t_2)u(t_2-t_1)u(t_1) - a^2 [e^{-(t_3-t_1)} + e^{-(t_3-t_1)-2}]e^{-t_2}u(t_3-t_1)u(t_2-t_1)u(t_1) + 2a^2 [e^{-(t_3-t_2)} - 1]e^{-t_2}u(t_3-t_2)u(t_2-t_1)u(t_1) + a^2 [e^{-(t_3-t_2)} - e^{-(t_3-t_2)}]e^{-t_1}u(t_3-t_2)u(t_2)u(t_1) + a^2 [e^{t_3} + e^{-t_3} - 2]e^{-t_2}e^{-t_1}u(t_3)u(t_2)u(t_1) + 2a^2 [1 - e^{-(t_3-t_2)}]e^{-t_2}e^{-t_1}u(t_3-t_2)u(t_2)u(t_1). \quad (2.16)$$

볼테라 커널을 계산하기 위한 다른 방법은 식 (2.5)와 같이 표시된 비선형 방정식으로부터 선형 미분연산자의 역변환 연산자, L^{-1} 을 도입하여 식 (2.17)과 같이 변환한다.

$$y(t) = L^{-1}\{x(t)\} + L^{-1}\{F[y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)]\}. \quad (2.17)$$

L 연산자의 라플라스 변환의 일반형, $L\{L\}$ 은

$$L\{L\} = a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n = K(s). \quad (2.18)$$

그러면 식 (2.5)의 라플라스 변환후 정리하면 식 (2.17)을 라플라스 변환한 결과와 같다.

$$Y(s) = \frac{X(s)}{K(s)} + \frac{1}{K(s)} L\{F[y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)]\}. \quad (2.19)$$

여기서 $G(s)=1/K(s)$ 라고 하고 라플라스 역변환하면 적분방정식의 형태가 구해진다.

$$y(t) = \int_0^t g(t-t_1)x(t_1)dt_1 + \int_0^t g(t-t_1)F[y(t_1), y'(t_1), \dots, y^{(n-1)}(t_1)]dt_1 \quad (2.20)$$

이 적분방정식으로부터 연속적인 근사방법(successive approximation technique)에 의해 근을 구할 수 있는데 시간영역(line-domain)에서 계산하는 것은 계산이 복잡하므로 주파수영역에서의 계산으로 볼테라 커널을 계산하는 것이 여기서 제안된다.

우선, 가정된 볼테라 시리즈의 해는 식 (2.3)에 주어지며 이것은 블록도로 나타내면 그림 1과 같고 n 차 해, $y_n(t)$ 는 n 차원의 라플라스 변환된 n 차 볼테라 커널에 의해 표시될 수 있다.

식 (2.20)에서 선형 해에 해당하는 1차 볼테라 커널은 쉽게 찾을 수 있다.

$$H_1(s) = L\{g(t)\} = G(s) \quad (2.21)$$

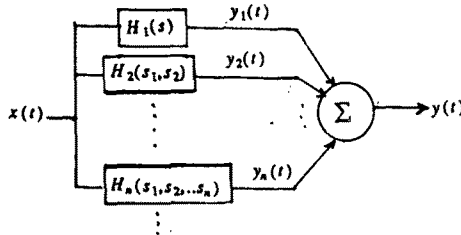


그림 1. 비선형 시스템의 볼테라 시리즈 해의 블록도

그러므로, 1차 해 $y_1(t)$ 이 구해지며, 이것을 식 (2.20)에 다시 대입한 결과를 블록도로 나타내면 그림 2와 같으며, 고차의 볼테라 커널은 비선형 부분인 $F[y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)]$ 의 라플라스 변환부분과 $G(s)$ 부분이 중첩(cascade)으로 접속되므로 구해질 수 있다.

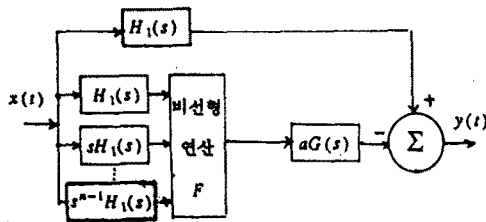


그림 2. 고차 볼테라 커널 계산을 위한 블록도

식 (2.6)에 나타나는 시스템의 예를 다시 고려하여 적분 방정식의 형태로 고치면

$$y(t) = \int_0^t g_1(t-t_1)x(t_1)dt_1 - \int_0^t a g_1(t-t_1)y^2(t_1)dt_1 \quad (2.22)$$

여기서 $g_1(t) = e^{-t}$ 그리고 $G_1(s) = 1/(s+1)$. 여기서 선형 부분의 해로

부터 $H_1(s)$ 는 구해진다.

$$H_1(s) = \frac{1}{s+1} \quad (2.23)$$

2차 볼테라 커널을 계산하기 위해 1차 볼테라 해를 대입하여 블록도로 구성하면 그림 3과 같고 이 그림에서 2차원의 라플라스 영역에서의 2차 볼테라 커널이 구해진다.

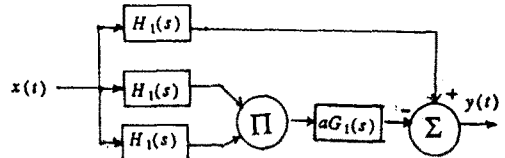


그림 3. 2차 볼테라 커널계산을 위한 블록도

$$H_2(s_1, s_2) = -aG_1(s_1+s_2)H_1(s_1)H_1(s_2) - \frac{a}{(s_1+s_2+1)(s_1+1)(s_2+1)} \quad (2.24)$$

같은 방식으로 2차까지의 볼테라 해를 식 (2.22)에 대입하여 3차 볼테라 커널이 구해진다.

$$H_3(s_1, s_2, s_3) = \frac{2a^2}{(s_1+s_2+s_3+1)(s_1+1)(s_2+1)(s_3+1)(s_2+s_3+1)} \quad (2.25)$$

시간 영역에서의 볼테라 커널을 앞서와 같이 다차원 라플라스 역변환으로 구해진다.

3차까지의 볼테라 시리즈 해는

$$y(t) = \int_0^t h_1(t_1)x(t-t_1)dt_1 + \int_0^t \int_0^{t_1} h_2(t_1, t_2)x(t-t_1)x(t-t_2)dt_1 dt_2 + \int_0^t \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} h_3(t_1, t_2, t_3)x(t-t_1)x(t-t_2)x(t-t_3)dt_1 dt_2 dt_3 \quad (2.26)$$

$\hat{y}(t)$ 는 무한의 볼테라 시리즈의 해, $y(t)$ 에서 4차 이하의 해를 자른(truncated) 결과이며 만약 비선형 시스템이 비선형도(nonlinearity)가 약한 경우 무한 시리즈의 볼테라 시리즈 해, $y(t)$ 는 수렴이 매우 빨라 낮은 차수부터 소수의 truncated 볼테라 시리즈 항으로도 근사시킬 수 있다.

앞에서 3차까지의 볼테라 커널이 계산되었으므로 입력 $y(t)$ 만 주어지면 $y(t)$ 는 다중 적분을 계산하면 구해지지만 만약 $x(t)$ 가 Laplace 변환이 가능한 특정한 형태의 함수이면 다중 적분 대신에 변수의 관련화(association of variables) 방법[3,5]에 의해 다차원의 해를 일차원의 해로 변환하는 것이 가능하다. $x(t)$ 를 단위 스텝함수라고 할 때 변수의 관련화 방법을 사용하여 i 차의 해, $y(i)$ 를 구하면

$$y_1(t) = 1 - e^{-t} \quad (2.27)$$

$$y_2(t) = a(-1 + 2te^{-t} + e^{-2t}) \quad (2.28)$$

$$y_3(t) = a^2[2 + 3e^{-t} - 3te^{-t} + 2t^2e^{-t} - 2e^{-2t} - 4te^{-2t} - e^{-3t}]. \quad (2.29)$$

III. 결론

비선형 미분방정식의 해석을 위한 볼테라 시리즈 해를 구하기 위해 볼테라 커널을 구하여야 하며 이것들이 구해지면 입력과 출력의 상관관계를 규명할 수 있다. 본 논문에서 이 볼테라 커널들을 구하기 위해 직접대입법에 의한 방식과 적분방정식으로의 변환 후 연속적인 근사방법(successive approximation method)에서 불특도를 사용하고 불특도 축소방식에 의해 볼테라 커널의 계산법이 제안되어 직접대입법 방식과 비교되었으며 동일한 결과가 얻어졌다. 불특도 축소에 의해 볼테라 커널을 계산하는 방법은 직접대입법에 비해 계산상의 복잡성을 크게 줄일 수 있다.

참고 문헌

1. V. Volterra, Theory of Functionals and of Integral and Integro-differential Equations, Dover Publications, Inc., New York, 1957.
2. N. Wiener, Nonlinear Problems in Random Theory, The Technology Press, M. I. T., 1959.
3. D. A George, Continuous Nonlinear Systems, Tech. Report 355, Research Lab. of Electronics, M. I. T., 1959.
4. J. F. Barrett, "The Use of Functionals in the Analysis of Nonlinear Physical Systems," Journal of Electronics Control, Vol. 15, No. 6, pp. 567-615, 1962.

5. F. H. Flake, "Volterra Series Representation of Nonlinear System," Trans. of IEEE, pp. 330-335, 1962.
6. S. Narayanan, "Application of Volterra Series to Intermodulation Distortion Analysis of Transistor Feedback Theory," IEEE Trans. on Communication Theory, CT-17, pp. 518-527, 1970.
7. L. O. Chua and Y. S. Tang, "Nonlinear Oscillation Via Volterra series," IEEE Trans. on Circuit and Systems, CAS-29, pp. 150-168, 1982.
8. D. D. Weiner and J. F. Spina, Sinusoidal Analysis and Modeling of Weekly Nonlinear Circuits, Van Nostrand Reinhold Company, 1980.
9. E. Bedrosian and S. O. Rice, "The Output Properties of Volterra Systems Driven by Harmonic and Gaussian Inputs," Proc. IEEE, Vol. 59, pp. 1688-1707, 1971.
10. H. L. Van Trees, "Functional Techniques for the Analysis of the Nonlinear Behavior of Phase-Locked Loops," Proc. IEEE, Vol. 52, pp. 894-911, 1964.
11. F. J. Lockett, Nonlinear Viscoelastic Solids, Academic Press, 1972.
12. W. G. Gottenberg et al, "An Experimental Study of a Nonlinear Viscoelastic Solid in Uniaxial Tension," Journal of Applied Mechanics, pp. 558-564, 1969.
13. D. K. Sung, Application of Volterra Series to Vibration Analysis, Thesis of the University of Texas at Austin, 1982.
14. M. Schetzen, The Volterra and Wiener Theories of Nonlinear Systems, John Wiley & Sons, Inc., 1980.