

인접행렬을 활용한 Single Stage Interconnection Network의 생성

김 성 천

서강대학교 전자계산학과

The generation of SSIN(Single Stage Interconnection Network) using Adjacency Matrix

Sung Chun Kim

Sogang University, Dept. of computer science

Abstract

In this paper, the Adjacency Matrix is applied to analyze the MIN, which is one of the kind and further implemented in designing the new kind of SSIN, which provides the special form of MIN that has identical link patterns between switching stages.

At first, new theorems are established and next the classes of the SSIN are generated from computer simulation.

1. 서론

병렬 프로세서는 구조적인 면에서 여러개의 프로세서와 메모리 모듈을 갖으며 이들간의 자료 흐름을 제어하는 하드웨어 및 소프트웨어는 병렬프로세서의 가장 중요한 부분의 하나로 연구 되어지고있다. 상호연결 네트워크는 이를 위한 기본적인 하드웨어로서 여러 형태로 구성되어있다 [1,2]. 최근의 주목을 받는 MIN은 스위칭 소자로 이루어진 스위칭 Stage 들과 그사이의 연결을 이루게 하는 link pattern 들로 구성되어 있다[3,6]. 특히 스위칭 Stage와 하나의 link pattern만을 사용해서 레지스터로 Buffering 하여 반복 수행케 함으로써 하드웨어의 절감을 갖도록 디자인 할 수가 있다. 이를 SSIN이라 하여 지금까지 알려진 것으로는 Omega 네트워크에서 얻어진 SSIN이 있다[2,4,5]. 그림

1은 8x8(8-input,8-output) Omega 네트워크를 나타내며 이의 등가 SSIN을 보여준다. MIN과 SSIN은 지금까지 여러각도에서 연구되어 여러 네트워크 Topology가 제안 되었으며 또한 이들의 제어 알고리즘들이 제시되었다[5-14].

본 논문에서는 새로운 SSIN을 디자인 하는데 그 목적을 두고 있으며 이를 위한 방법으로 인접행렬을 적용시키고 있다. 따라서 이에따라 분석된 MIN을 검토하여 역으로 MIN에서 동일한 link pattern을 갖기위한 인접행렬 조건의 이론을 정립하여 컴퓨터를 활용 새로운 SSIN을 찾아 내었다. 또한 이들의 link pattern 들을 분석하여 Topology describing rule로 일반화 하여 표현 하였다[7].

2. MIN의 인접행렬

MIN은 그래프 모델로 표현 되어서 이의 곧 인접행렬로 나타내어질 수있다[9,10,15,16]. 그림 2는 Omega 네트워크(그림 1a)의 그래프 모델을 보여주며 이 모델의 인접행렬은 그림 3과 같다. 인접행렬의 행(column)과 열(row)은 MIN의 그래프 모델의 node로서 구성되어 있어 행은 destination node를 얻은 source node를 나타낸다. 특히, 그림 1a의 입력 단자(input terminal)가 연결된 node를 input node, 출력단자(output terminal)가 연결된 node를 output node라 하여 그림2에서 각각 node 0,1,2,3과 node 8,9,10,11이 이에 해당된다. 인접행렬의 element는 두개 node사이에 연결(Connection)이 있는 경우에만

1로 set된다.

예를들면 그림 3에서 행 4번과 열 0번에 entry 1은 그래프 모델(그림2)의 node 0와 4사이엔 연결이 존재함을 보여주고 있다. 인접행렬을 R이라할때 행렬  $R^m$ 은 m개의 R을 곱한것(mod 2 arithmetic 적용)으로서 node 간의 m-step path를 나타내다. 일례로 그림 4는 m=2일때 즉,  $R^m=R^2$ 을 나타내어 이는 열 0,1,2,3번과 행 8,9,10,11번 사이에 2-step path가 존재하고 있음을 보여준다(왜냐하면 entry가 1임). 즉, MIN의 그래프 모델에서 8x8 MIN의 input과 output node 사이에 full connectivity가 있음을 보여 주는 것이다 [9].

**정리 1**

입의 MIN의 인접행렬을 R이라 할때 행렬  $R^n$ 에서 I/O node의 행렬 간의 entry가 모두 1이면 full connectivity가 보장된다. (I/O node는 MIN의 그래프 모델의 input, output node를 나타내며 각각의 node 수는  $N(=2^n)$ 임)

증명

MIN에서 full connectivity가 성립되기 위하여는 input과 output node 간에 tree 구조가 형성되어야 한다[9]. 이때 I/O node간의 distance는  $\log_2 N$ 의 link stage가 있으므로 n 이 된다. 그러므로 인접행렬의 특성에 따라  $R^n$ 의 entry는 I/O간 node에서는 모두 1이 set 된다. Q.E.D.

3. Sub-Adjacency Matrix (SAM)

인접행렬 R, 또는 행렬  $R^m$ 의 Subset이 아래와 같은 특징들을 모두 충족할 때 SAM(Sub-Adjacency Matrix)이라 정의 한다.

1. SAM의 열은 MIN의 Bipartite Subgraph의 왼쪽 partition을 나타내며( $R^m$ 에서는 m-step path를 1-step으로 보았을때의 Bipartite subgraph)
2. 행은 오른쪽 partition을 표시하며
3. 적어도 한 entry가 1 이어야 한다.

일반적으로 MIN의 그래프 모델의 input node수가  $2^n$ 일때  $R^m$ 에는  $(n-m+1)$ 개의 SAM 즉  $SAM_1, \dots, SAM_{(n-m+1)}$ 가 나타난다. 이때  $SAM_i$ 는 MIN의 그래프 모델에서 i번째의 link stage의 Bipartite Subgraph로 부터 얻어진다. 예로서 그림 5에서 보듯이  $n=3, m=1, 2, 3$  일때 각각  $SAM_i$ 를 보여주고 있다.

**정리 2**

입의 MIN의 인접행렬을 R이라할때

$$\prod_{i=1}^n SAM_i = 1$$

를 만족하면 MIN의 full connectivity가 보장된다. (SAM의 entry가 모두 1이면 SAM=1이라 정의함)

증명

$R^m$ 에는  $SAM_1, \dots, SAM_{(n-m+1)}$ 가 존재한다.  $n=m$ 일때  $SAM_1$ 만이 생성되는데 이때 entry가 모두 1이라하면 즉,  $SAM_1=1$ 일때 정의에 의해 MIN의 I/O node 간의 m-step path가 모두 1임을 의미하므로 정리 1에 의거 full connectivity가 성립함이 증명 된다. Q.E.D.

그림 6은 입의 MIN(이경우는 Zeta 네트워크[3])의 그래프 모델에서의  $SAM_i$ 를 나타내고 있다. 이때 I/O node 수는 8개인 경우를 보이고 있어  $n=3$ 이 되어  $R^{(m=1)}$ 에는  $SAM_1, SAM_2, SAM_3$ 가 존재하게 되며  $SAM_1 \times SAM_2 \times SAM_3 = 1$ 이 됨으로 MIN이 full connectivity를 만족함을 보여준다.

4. SSIN의 SAM

SSIN은 MIN의 특수 case로서 각 link stage에 있는 모든 link pattern이 동일하다. 따라서 인접행렬 R에서 모든  $SAM_i$ 는 동일한 entry pattern을 갖게 된다.

아래와 같은 정리가 유추된다.

**정리 3**

입의 SSIN을 구성하는 MIN의 인접행렬을 R이라 할때

$$(SAMI)^n = 1, \quad i \text{는 } 1 \leq i \leq n \text{의 임의의 값.}$$

을 만족하는 SAMI가 존재한다.

**증명**

SSIN은 언급한바와같이 link pattern이 동일하므로 R의 모든 SAMI는 동일하다. 따라서 정리 2에 의하여  $\prod_{i=1}^n SAMI = (SAMI)^n = 1$ 을 만족한다. Q.E.D.

따라서  $(SAMI)^n = 1$ 을 만족하는 동일한 SAMI를 구하는 것이 가능한 SSIN을 얻는 필요 충분 조건이 된다. 일반적으로 이를 구하기 위하여는 모든 n 값에 대하여 생각해야 하므로 본 논문에서는 이에 따른 복잡성을 간소화하여 lower bound를 구하는데 그 목적을 두어 n=2인 경우에 국한, 컴퓨터 시뮬레이션을 하여 그해를 구하였다.

**정리 4**

SSIN은 적어도 4개의 서로 다른 class가 존재한다. (수평 또는 수직에 대한 mirror image가 같은 link pattern은 하나의 class에 속함)

**증명**

이의 증명은 컴퓨터 결과에 의해 주어진다. 총 1080개의 네트워크가 생성되었는데 그중 12네트워크만이 정리 3을 충족하였다. mirror image를 같은 class내에 포함시킨 결과 총 4개의 class를 생성하였다. Q.E.D.

이 4개의 class는 여러 link pattern을 구성할 수 있는 최저의 n값(즉 n=2)에서 얻어진 결과 이므로 있을 수 있는 SSIN의 lower bound이다.

이들은 각각 Omega class, Alpha class, Beta class, 그리고 Gamma class로 명명하여 Topology describing rule로 일반화하여 표현하였다.

**5. SSIN의 class**

(1). Omega 네트워크 class

기존의 Omega 네트워크에서 얻어지는 SSIN이다. 원래의 input shuffle을 제거하여도 full connectivity에 영향을 주지않는 약간 변조된 형태의 네트워크이다. 이

의 Topology describing rule은 아래와 같으며 n=3 경우 그림 7과 같다. 2개의 mirror image를 갖는다.

Topology Describing Rule (이하  $\ell = n+1$ )

$$\beta_0^0 [(p_2 p_{\ell-1} \dots p_1)_0] = (p_{\ell-1} p_{\ell-2} \dots p_1^0)_1$$

for link  $(p_2 p_{\ell-1} \dots p_1^0)_1$ ,

$$\beta_0^1 [(p_2 p_{\ell-1} \dots p_1)_0] = (p_{\ell-1} p_{\ell-2} \dots p_1^1)_1$$

for link  $(p_2 p_{\ell-1} \dots p_1^1)_1$ .

(2). Alpha 네트워크 class

Omega 네트워크 class와는 달리 중앙 부분에서 보았을 때 비대칭 구조를 갖는 매우 특이한 형태를 갖는다. 따라서 총 4개의 mirror image를 갖고있다. 그림 8에 그 구조가 나타나있다.

Topology Describing Rule

$$\beta_0^0 [(p_2 p_{\ell-1} \dots p_1)_0] = (p'_{\ell-1} p'_{\ell-2} \dots p'_1)_1$$

for link  $(p_2 p_{\ell-1} \dots p_1^0)_1$ ,

$$\beta_0^1 [(p_2 p_{\ell-1} \dots p_1)_0] = (p'_{\ell-1} p'_{\ell-2} \dots p'_1^1)_1$$

for link  $(p_2 p_{\ell-1} \dots p_1^1)_1$ ,

where  $(p'_2 p'_{\ell-1} p'_{\ell-2} \dots p'_1)$

$$= \begin{cases} (p_2 p_{\ell-1} p_{\ell-2} \dots p_1) & \text{for } p_2 = 0 \\ (p_2 \bar{p}_{\ell-1} \bar{p}_{\ell-2} \dots \bar{p}_1) & \text{for } p_2 = 1. \end{cases}$$

(3). Beta 네트워크 class

Omega 네트워크 class처럼 대칭 구조를 갖는다. 역시 2개의 mirror image를 갖는다(그림 9).

Topology Describing Rule

$$\beta_0^0 [(p_2 p_{\ell-1} \dots p_1)_0] = (\bar{p}_{\ell-1} \bar{p}_{\ell-2} \dots \bar{p}_1^0)_1$$

for link  $(p_2 p_{\ell-1} \dots p_1^0)_1$ ,

$$\beta_0^1 [(p_2 p_{\ell-1} \dots p_1)_0] = (\bar{p}_{\ell-1} \bar{p}_{\ell-2} \dots \bar{p}_1^1)_1$$

for link  $(p_2 p_{\ell-1} \dots p_1^1)_1$ .

(4). Gamma 네트워크 class

Alpha 네트워크 class와 같이 비대칭 구조를 갖고 있다. 따라서 4개의 mirror image가 존재한다(그림 10).

Topology Describing Rule

$$\beta_0^0 [(p_2 p_{2-1} \dots p_1)_0] = ((p_{2-1} p_{2-2} \dots p_1^0) + 1)_1$$

for link  $(p_2 p_{2-1} \dots p_1^0)_1$ ,

$$\beta_0^1 [(p_2 p_{2-1} \dots p_1)_0] = ((p_{2-1} p_{2-2} \dots p_1^1) + 1)_1$$

for link  $(p_2 p_{2-1} \dots p_1^1)_1$ .

6. 결언

MIN의 가장 중요한 특성의 하나인 full connectivity는 인접행렬을 적용함으로써 규명할 수 있으며 또한 이의 Subset인 SAM을 활용하여 여러 MIN을 디자인 할 수가 있다. 특히 동일한 SAM을 갖으며 동시에 full connectivity를 만족 할때에 SSIN이 구성되는 필요 충분조건이 됨을 알 수 있다. SSIN은 기존의 Omega 네트워크에서만 존재 하는것이 아니라 이외에 11개의 네트워크가 추가로 있어 lower bound인 총 4개의 class로 구분됨이 밝혀지었다. 앞으로 연구과제는 새로 생성된 이들 SSIN의 특성을 비교 연구함에 있다. 현재 연구가 진행되고 있다.

7. 참고문헌

1. Kuhn, R. H. & Paudau, D. A., eds., Tutorial on Parallel Processing, IEEE Computer Society Press, no. 367, LA1981
2. Kai Hwang & Faye' A. Briggs, Computer Architecture and Parallel Processing, McGraw Hill, 1984
3. S. C. Kim & D. P. Agrawal, "Easily Testable Interconnection Network from Three-State Cells," Proc. the 16th Annual Hawaii Int. Conf. System Sciences, Vol. 1, pp. 234-243, 1983.
4. D. H. Lawrie, "Access and Alignment of Data in an Array Processor," IEEE Trans. Comp., Vol. C-24, pp. 1145-1155, 1975, Dec.
5. C. L. Wu and T. Feng, "The Universality of Shuffle-Exchange Networks," IEEE Trans. Comp., Vol. c-30, No. 5, pp. 324-331, 1981, May
6. T. Y. Feng, "A Survey of Interconnection Networks," IEEE Computer Mag., pp. 12-27, 1981, Dec.

7. C. L. Wu & T. Feng, "On A Class of Multistage Interconnection Networks," IEEE Trans, Comp., pp. 694-702, 1980, Aug.
8. D. K. Pradhan & K. L. Kodandapani, "A Uniform Representation of Single and Multistage Interconnection Networks used in SIMD Machines," IEEE Trans. Comp., Vol. c-29, pp. 777-791, 1980, Sept.
9. D. P. Agrawal and S. C. Kim, "On Non-Equivalent Multistage Interconnection Network," Proc. 1981. Int. Conf. Parallel Processing, pp. 234-237, 1983, Aug.
10. D. P. Agrawal, "Graph Theoretical Analysis and Design of Multistage Interconnection Network," IEEE Trans. Comp., Vol. c-32, pp. 637-647, 1983, July.
11. T. Y. Feng & W. Young, "An  $O(\log^2 N)$  Control Algorithm," Proc. 1985. Int. Conf. Parallel Processing, pp. 334-340, 1985, Aug.
12. V. Cherkassky & M. Malek, "Analysis of CC-Banyan Networks," Proc. 1986. Int. Conf. Parallel Processing, pp. 115-118, 1986, Aug.
13. A. Seznec "An Efficient Routing Control Unit for the Sigma Network," Proc. 1986. Int. Symp. Comp. Arch., pp 158-168 1986, June.
14. S. T. Huang & S. K. Tripathi "Finite State Model and Compatibility Theory: New Analysis Tools for Permutation Networks," IEEE Trans. Comp., Vol. c-35, pp. 591-601, 1986, July.
15. F. Harary, Graph Theory, Addison-Wesley Publishing Company, Third Printing, 1972.
16. M. N. S. Swamy, Graphs, Networks, and Algorithms Wiley-Interscience, 1981.

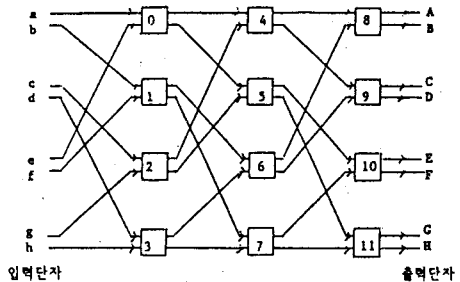


그림 1a 8 x 8 Omega 네트워크 :  $\Omega_8$

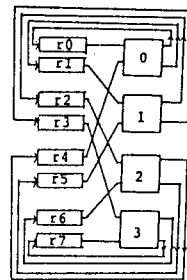


그림 1b 등가 SSIN

rt : 역저스버키

그림 1 8 x 8 Omega 네트워크 및 SSIN

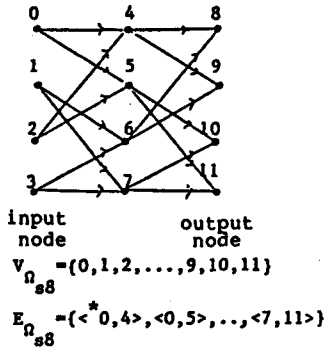


그림 2 Omega 네트워크의 Simplified 그래프 모델

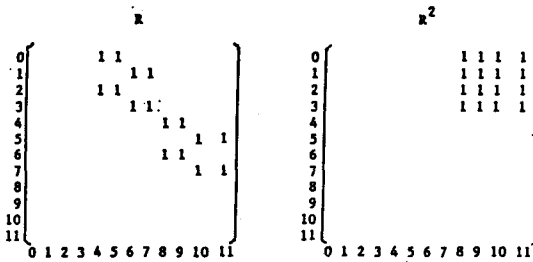


그림 3 그림 2의 인접행렬 R 행렬  $R^2 (=R \times R)$

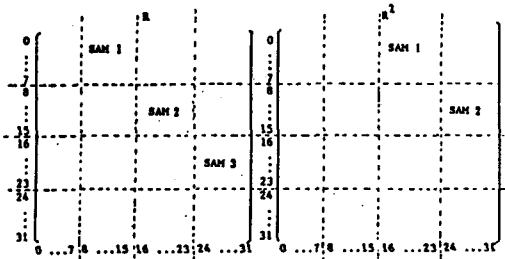


그림 5  $R, R, R$  에서의 Sub-Adjacency Matrix(SAM)

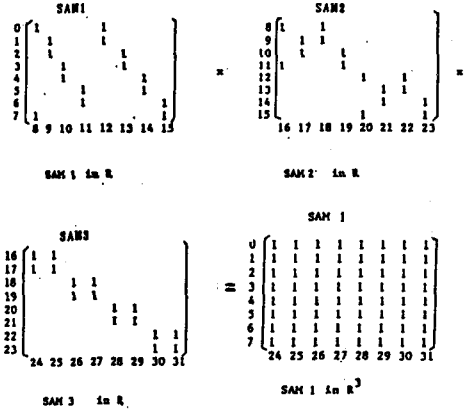


그림 6 그래프 모델(Zeta 네트워크)에서의 SAM1, SAM2, SAM3

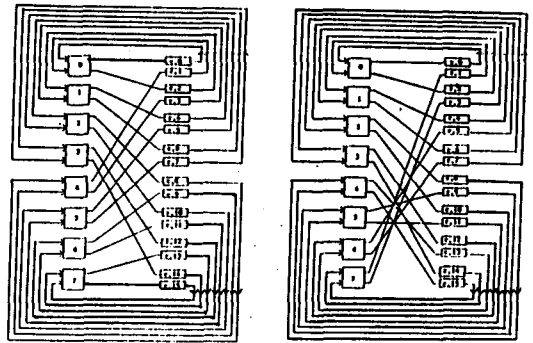


그림 7 Omega 네트워크 class

그림 8 Alpha 네트워크 class

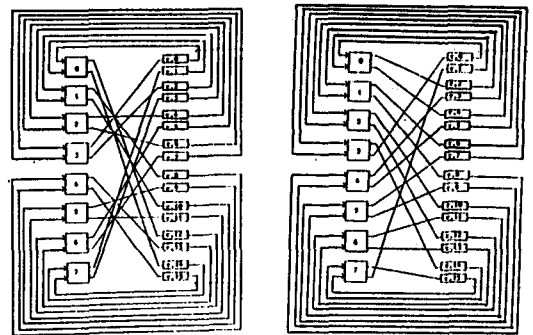


그림 9 Beta 네트워크 class

그림 10 Gamma 네트워크 class