

Recursive 디지털 여파기에서 감도 및 Round-off Error에 관한 연구

전용식, 방삼일, 진단강  
 단국대학교 공과대학 전자공학과

A Study on the Sensitivity and the Round-off Errors In Recursive Digital Filter

Yong Sik CHUN, Sung Ill BANG, Yeon Kang CHIN  
 Dept. of Electronics Eng. Dankook Univ.

\* ABSTRACT \*

In this paper, we analyzed the sensitivity and the round-off errors with respect to each multiplier coefficients in recursive digital filter. The multiplier coefficients were taken on some structures, derived from 2nd-order direct form, by using quality factor.

In this study, we have shown the constant Q-sensitivity with respect to quality factor in some structures.

1. 서론

일반적으로 디지털 필터의 설계, 제작에 있어서 야기되는 error의 원인은 전달함수 계수의 양자화에 의한 error, 필터에 입력되는 표본값의 양자화에 의한 error, 연산과정에 있어서 발생하는 round-off error로 분류된다[1]-[3].

계수의 양자화에 의한 error는 계수들의 감도(sensitivity)로써 표현되고 연산과정에 있어서의 round-off error는 신호대잡음(S/N)비로써 평가[4]되며 디지털 필터에 있어서 전달함수에 따른 승산기 계수(multiplier coefficient)의 감도에 관한 많은 연구가 있었다[5]-[8].

본 논문에서는 각각의 변형된 디지털 필터 구조 [5]-[7]에 대하여 양질도(quality factor)를 적용하여, 양질도에 따른 전달함수의 감도를 컴퓨터로 simulation 하였으며 시스템 출력에서의 round-off error를 이론적으로 해석하였다.

2. 디지털 필터의 구조

(1) 디지털 필터의 구성

일반적으로 Recursive 디지털 필터를 실현하는데 가장 많이 쓰이는 형태인 2차 디지털 필터의 전달함수는 다음과 같이 주어진다[1].

$$H(z) = \frac{b_0 z^2 + b_1 z + b_2}{z^2 - a_1 z + a_2} \quad \dots (1)$$

(1)식으로 주어진 디지털 필터의 전달함수에서 양호한 해석을 간단히 하기 위하여 영점을 고려하지 않으면 다음과 같다[1].

$$H(z) = \frac{1}{z^2 - a_1 z + a_2} \quad \dots (2)$$

여기서 극점은  $re^{j\theta}$  에 위치하므로  $a_1 = 2r \cos \theta$ ,  $a_2 = r^2$  이다.

(2)식과 같은 전달함수를 갖는 시스템을 z-평면 상에 표시하면 그림1과 같으며, 작은값의  $\delta$  와  $\theta$  에 대하여 전달함수에 대한 감도 및 round-off error는 대략  $1/(\delta \sin \theta)$ 에 비례[5]하고, 이들 error를 줄이기 위한 많은 논문[5]-[8]이 발표 되었다.

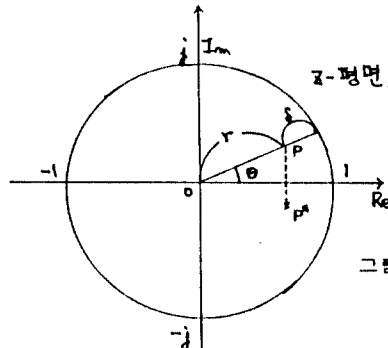


그림 1. 2차 필터의 극점의 위치

그림2는 Bhuyan과 Chatterji 방법[7]을 표현한 것이며 그림2와 같은 형태를 가지는 디지털 필터에 대해 생각해보자.

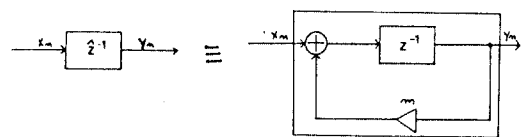


그림 2. Bhuyan, Chatterji 방법으로서의 실현 (type 1A)

(2) 양질도를 적용한 디지털 필터

디지털 필터에서 양질도(quality factor: Q)[5]-[6]를 적용하여 Q-감도를 고찰해 보자.

(2)식과 같이 표현된 필터의 전달함수에서 양질도 Q는 다음과 같이 계산 된다[5].

$$Q = \frac{\sqrt{(1+a_2)^2 - a_1^2}}{2(1-a_2)} \quad \dots (3)$$

양질도는 2차 direct form의 경우 극점이 z=1에 접근함에 따라 증가하게 되며 대개의 필터의 경우에 양질도는 대략적으로  $\theta/\delta$  로써 나타낼 수 있으며 (3)식으로 표시된 양질도로부터 승산기 계수  $a_1$  에 대한 Q-감도는 다음과 같이 정의 된다[6].

$$\frac{\partial Q}{\partial a_1} = \frac{Q}{a_1} \frac{\partial Q}{\partial a_1} \quad \dots (4)$$

여기서 type 2A는 type 1A의 2차 디지털 필터 구조를 나타낸다.

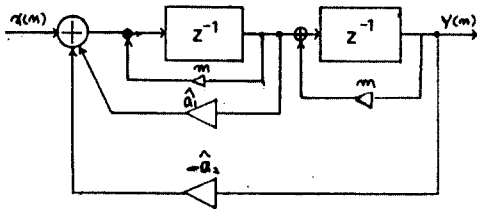


그림 3. type 1A의 2차 디지털 필터의 구성 (type 2A)

3. Q-감도를 적용한 계수의 감도 고찰

디지털 시스템을 실제 실현 하는데 있어서 word-length는 한정 되므로 계수들을 양자화 하여야 함으로 인한 error가 발생하게 된다. 이러한 error는 계수들에 대한 감도로서 평가되며 양질도를 이용하여 이를 표현하여 보자.

2차 Direct form에서 승산기 계수들에 대한 감도, 즉 Q-감도는 (3)식과 (4)식으로부터 다음과 같이 유도된다.

$$\frac{\partial Q}{\partial a_1} = \frac{a_1^2}{a_1^2 - (1+a_2)^2} \quad \dots (5)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial a_2} = \frac{a_2}{a_1^2 - (1+a_2)^2} \cdot \frac{2a_1^2 - 2a_2^2 - 3a_1 - 3}{1 - a_2} \quad \dots (6)$$

같은 방법으로 type 2A에 대한 Q-감도는 다음과 같으며 여기서 승산기 계수는 각각  $\hat{a}_1 = a_1 - 2m$ ,  $\hat{a}_2 = a_1 m + a_2 - 8m^2$ 이다.

$$\frac{\partial Q}{\partial \hat{a}_1} = \frac{\hat{a}_1}{R} \cdot 2 \cdot d \quad \dots (7)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \hat{a}_2} = \frac{\hat{a}_2}{R} \cdot \left\{ 2 - m^2 + (cm^2 - b_{cm}) \hat{a}_1 - \hat{a}_1^2 + 2\hat{a}_2 \right\} \quad \dots (8)$$

여기서  $R = 4 \cdot Q \cdot (1 - m^2 + \hat{a}_1 m - \hat{a}_2)^3$   
 $d = 2(m^2 + 1) \hat{a}_1 \hat{a}_2 - \hat{a}_1^2 m^2 - (2m^3 - m^4 - 10m^2 + 3) \hat{a}_1 - (m^5 - 9m^2 + 8m)$

양질도를 이용하여 전달함수의 감도의 최대값을 근사적으로 구하면 다음과 같다.  
 먼저 그림 1에서 작은 값의  $\theta$ 에 대해  $\sin \theta \approx \theta$ 이며  $\delta$ 와  $\theta$ 의 크기가 거의 같은 경우에 대하여 다음과 같은 관계식이 주어진다.

$$a_1 \approx 2 - 3\delta + \delta^2 \quad \dots (9)$$

$$a_2 \approx 1 - 2\delta + \delta^2 \quad \dots (10)$$

(9), (10)식으로부터 type 2A에 대한 최대 감도를 근사적으로 구하면 다음과 같으며 여기서 m은 m과 rounding된 m 값과의 차이를 나타낸다.

$$\frac{\partial Q}{\partial \hat{a}_1} \approx \frac{1}{2} \quad \dots (11)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \hat{a}_2} \approx \frac{3}{4} \quad \dots (12)$$

같은 방법으로 2차 Direct form [1], Agarwal과 Burrus 방법 [5], Nishimura와 Hirano 및 Pal 방법 [6] 등과 본 논문에서 적용한 type 1A의 방법 [7]에 적용하여 작은 값의  $\delta$ 와  $\theta$ 에 대한 최대감도를 표 1에 나타내었다. Q 값에 대한 Q-감도는 5장에 나타내었다.

표 1. 작은 값의  $\delta$ 와  $\theta$ 에 대한 Q-감도의 최대 감도 근사값

		$\theta \gg \delta$	$\theta \sim \delta$	$\theta \ll \delta$
Direct form	$\frac{\partial Q}{\partial a_1}$	$1 - \frac{1}{6}$	$3 - \frac{1}{6}$	$(1 - \frac{1}{6})^2$
	$\frac{\partial Q}{\partial a_2}$	$\frac{4+30}{860}$	$\frac{7+10}{118}$	$\frac{7+16}{480}$
Agarwal Burrus 방법	$\frac{\partial Q}{\partial a_1}$	$\frac{20}{3-0}$	$\frac{2-3\delta}{2-3\delta}$	$\frac{0.5}{1-8}$
	$\frac{\partial Q}{\partial a_2}$	$\frac{20}{3-0}$	$\frac{4\delta}{2-3\delta}$	$\frac{4}{1-8}$
Nishimura Hirano, Pal 방법	$\frac{\partial Q}{\partial a_1}$	1	1	1
	$\frac{\partial Q}{\partial a_2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
Type 2A	$\frac{\partial Q}{\partial \hat{a}_1}$	$\frac{13\delta}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{20}{8}$
	$\frac{\partial Q}{\partial \hat{a}_2}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{7}$

4. Round-off Error의 이론적 해석

그림 4는 자역통과 디지털 필터를 실현할 경우 연산과정에서 발생하는 모든 error sequence를 도시한 것이다. 입력 및 모든 register의 length는 (b+1) bits로 주어지며 error source e(n)은 다음을 만족한다고 가정하자.

- o white noise sequence
- o 하나의 양자화 간격에 대하여 균일한 분포
- o 입력 x(n) 및 출력 u(n)에 uncorrelate

Rounding에 의해 양자화가 이루어 지는 경우 error sequence의 범위는  $-q/2 < e(n) \leq q/2$ 이며 error sequence e(n)의 variance는 다음과 같다.

$$\sigma_e^2 \approx E[(e - m_e)]^2 = \frac{1}{12} q^2 \quad \dots (13)$$

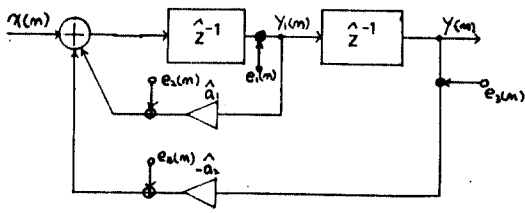


그림 4. 2차 Recursive 디지털 필터의 round-off error 모델

error sequence  $e(n)$ 이 들어가는 riad로부터 출력까지의 시스템의 unit sample 응답을  $h_e(n)$ 이라 하면 출력 잡음 variance를 다음과 같다.

$$\sigma_e^2 = \sigma_e^2 \cdot H_e^2 \quad \dots(14)$$

$$\begin{aligned} \text{여기서 } H_e^2 &\approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H_e(e^{j\omega})|^2 d\omega \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} h_e^2(m) \end{aligned}$$

이다.

그림 4에서 각각  $Z^{-1}$  블록으로부터 나온 sequence는  $\hat{a}_1, \hat{a}_2$ 가 균해지기 전에 scaling하는 것으로 인한 error source  $e_1(n)$ 과  $e_2(n)$ 이 발생하게 된다. 따라서 입력에서 중간상태 변수  $y_1(n)$ 까지의 전달함수  $H_1(z)$ 라 하면 그림 4에서 보어진 error sequence  $e_1(n)$ 은  $\pm H_{1p} \cdot a^m / 2$  사이에 놓이므로  $e_1(n)$ 의 variance는 다음과 같다.

$$\sigma_{e_1}^2 = \frac{1}{12} \cdot H_{1p}^2 \cdot a^2 \quad \dots(15)$$

여기서

$$H_1(z) = \frac{Y_1(z)}{X(z)} = \frac{\hat{z}}{z^2 - \hat{a}_1 z + \hat{a}_2} = \frac{z - m}{z^2 - a_1 z + a_2} \quad \dots(16)$$

$$|H_1(e^{j\omega})|^2 = \frac{1 + m^2 - 2m \cos \omega}{1 + a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2 \cos \omega + 2ab \cos \omega} \quad \dots(17)$$

같은 방법으로 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$H_2(z) \approx \frac{Y_2(z)}{E_2(z)} = H_1(z) \quad \dots(18)$$

$$H_3(z) \approx \frac{Y_3(z)}{E_3(z)} = -\hat{a}_2 H_1(z) \quad \dots(19)$$

여기서

$$H_{2p}^2 = \sum_{m=0}^{\infty} h_{2p}^2(m) = |x_{2p}(m)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H_2(z)|^2 \cdot z^{m+1} dz \quad \dots(20)$$

위의 (20), (21)식으로 부터  $\theta \approx \delta$  인 경우에 대해서 근사적으로 다음과 같이 계산된다.

$H_{1p}^2, H_{2p}^2, H_{3p}^2$ 를 전달함수  $H_1(z), H_2(z), H_3(z)$ 의  $\theta \approx \delta$  인 경우에 대한 최대근사값 이라면 각각 다음과 같다.

$$H_{1p}^2 \approx \frac{1}{2\delta}, \quad H_{2p}^2 \approx \frac{3}{8\delta}, \quad H_{3p}^2 \approx \frac{10}{2} \quad \dots(22)$$

따라서 출력 noise의 variance는 다음과 같다.

$$\sigma_{e_1}^2 \approx \frac{1}{12} \cdot a^2 \cdot \frac{3}{32\delta^3} \quad \dots(23)$$

같은 방법으로

$$\sigma_{e_2}^2 = \sigma_{e_1}^2 \approx \frac{1}{12} \cdot a^2 \cdot \frac{1}{4\delta^3} \quad \dots(24)$$

$$\sigma_{e_3}^2 = \frac{1}{12} \cdot a^2 \cdot \frac{1}{16\delta^3} \quad \dots(25)$$

그러므로 전체 출력 noise variance는 (23) - (25)식으로 부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\sigma_e^2 \approx \frac{1}{12} \cdot a^2 \cdot \frac{1}{32\delta^3} \quad \dots(26)$$

입력 sequence  $x(n)$ 이 진폭이 1이고 그림 5의 주파수에서 최고 전달함수  $H_p$ 를 가진다고 가정하면 출력 sequence의 variance는 다음과 같다.

$$\sigma_y^2 = H_p^2 \cdot \sigma_e^2 \approx \frac{1}{16\delta^4} \quad \dots(27)$$

그러므로 출력에서의 S/N비는 다음과 같다.

$$= \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} = \frac{24}{13\delta} \cdot \frac{1}{\delta^2} \quad \dots(28)$$

동일한 방법으로  $\theta \gg \delta, \theta \ll \delta$ 에 대한 근사적인 S/N비를 표 2에 나타내었다.

표 2. 출력의 신호대잡음(S/N)비

	$\theta \gg \delta$	$\theta \approx \delta$	$\theta \ll \delta$
Direct form	$\frac{1}{\delta^2} \cdot \frac{24\delta^3}{8\delta^2+1}$	$\frac{1}{\delta^2} \cdot \frac{48\delta^3}{16\delta^2+1}$	$\frac{1}{\delta^2} \cdot \frac{24\delta^3}{16\delta^2+1}$
Agarwal과 Burrus 방법	$\frac{1}{\delta^2} \cdot \frac{12\delta}{4\delta^2+1}$	$\frac{1}{\delta^2} \cdot \frac{2}{\delta}$	$\frac{1}{\delta^2} \cdot \frac{12}{5\delta}$
Nishimura, Hizano 및 Pal 방법	$\frac{1}{\delta^2} \cdot \frac{12\delta}{4\delta^2+1}$	$\frac{1}{\delta^2} \cdot \frac{6\delta}{29\delta}$	$\frac{1}{\delta^2} \cdot \frac{3}{\delta}$
Bhuyan과 Chatterji 방법	$\frac{1}{\delta^2} \cdot \frac{3}{\delta}$	$\frac{1}{\delta^2} \cdot \frac{24}{13\delta}$	$\frac{1}{\delta^2} \cdot \frac{12}{5\delta}$

### 5. Simulation 및 검토

다음과 같은 전달함수를 이용하여 앞에서 논의한 이론적인 해석 방법에 대해 검토해 보기로 하자.

$$H(z) = \frac{1}{z^2 - 1.897606345z + 0.94090} \quad \dots(29)$$

(29)식과 같이 표현된 전달함수의 주파수 특성은 그림 5와 같으며 여기서 대역폭은 0.207921(rad/sec)이고 매의 전달함수의 크기는 6619.9949이다. 극점에서 단위원까지의 거리  $\delta = 0.03$ 이고 위상각  $\theta = 0.209440(\text{rad})$ 이므로 극점은 단위원 및  $z=1$ 에 가까이 위치하고 있다.

또한 Q값에 대한  $\theta$ -감도의 변화를 살펴보면 그림 6과 같이 나타내어진다.

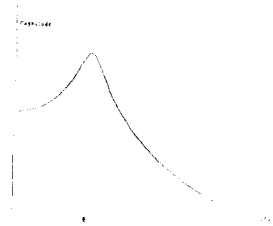


그림 5. 전달함수의 주파수 특성

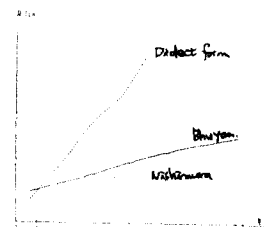


그림 6. Q에 대한  $\theta$ -감도

## 6. 결 론

본 논문에서는 극점이 단위원 가까이에 위치하는 저역통과 2차 디지털 필터에서 양질도의 변화에 따른 Q-값도의 변화 및 round-off error에 대하여 고찰해 보았다.

표2와 그림 6에서 볼수 있듯이 Bhuvan Chatterji 방법으로부터 디지털 필터를 실현하는 경우 S/N비와 감도면에서는 양질도의 변화 즉 계수의 변화에 따른 감도 특성 일정하게 나타남을 알 수 있었다.

## 7. 참 고 문 헌

- [1] "Selected Papers in Digital Signal Processing, II, Digital Signal Processing Committee, IEEE-ASSP Society, ed., New-York: IEEE Press, 1976.
- [2] A. V. Oppenheim and R. W. Schaffer, Digital Signal Processing, Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1975.
- [3] L. B. Jackson, "On the Interaction of Round-off Noise and Dynamic Range in Digital Filters," Bell Syst. Tech. J., vol. 49, pp. 159-184, Feb. 1970.
- [4] P. Lo and Y. Jeng, "Minimum Sensitivity realization of Second Order Recursive Digital Filter," IEEE Trans. ASSP, vol. ASSP-30, no. 6, pp. 930-937, Dec. 1982.
- [5] R. C. Agarwal and C. S. Burrus, "New Recursive Digital Filter Structures Having Very Low Sensitivity and Round-off Noise," IEEE Trans. CAS, vol. CAS-22, no. 12, pp.921-927, Dec. 1975.
- [6] S. Nishimura, K. Hirano, and R. N. Pal, "A New Class of Very Low Sensitivity and Low Round-off Noise Recursive Digital Structures," IEEE Trans. CAS, vol. CAS-28, no. 12, pp. 1152-1158, Dec. 1981.
- [7] L. Bhuvan and B. N. Chatterji, "Very Low Sensitivity Recursive Digital Filter Structures," Electronics Letters, vol. 17, no. 10, May, 1981.
- [8] J. Szczupak and S. K. Mitra, "On Digital Filter Structures with Low Coefficient Sensitivities," Proc. IEEE, vol. 66, no. 9, pp.1082-1089, Sep. 1978.