

Spheroidal Coordinate System을 이용한 전류분포 해석

최재구<sup>o</sup>

김정기

중앙대학교 전자과

On the Analysis of Current Distribution  
by using Spheroidal Coordinate System

Jae Koo CHOI

Jung Ki LIM

Dept. of Electronics Chung Ang Univ.

ABSTRACT In this paper, the characteristics of various spheroidal antennas, that are determined by the current distribution and the applied impressed field, are discussed by specifying a boundary by one coordinate of spheroidal coordinate system. The moment method is used for computer simulation, using cubic B splines for an expansion and point matching for testing.

1. 서론

전자장 이론의 실제적 응용이나 해석에 있어서 어떠한 경계조건을 설정하는가는 중요한 문제이다. 본 논문에서는 경계를 좌표계의 한 좌표로 이용하여 안테나 및 scattering 문제 해결의 기본을 이루는 전류분포를 구하였다. 이상이 다른 여러가지 prolate spheroid에 대한 전류분포 및 전계의 입사각에 따른 특성을 조사하였다. 또한 IEF(Integral Equation Formulation)함에 있어 singularity를 피하고 적분방정식의 간략화 및 simulation time을 줄이기 위하여 Waterman이 제시한 extended boundary condition을 적용하였다. computer technique으로는 내적을 이용한 직접적인 matrix equation으로의 변환인 moment method(point matching)를 이용하였다. expansion function으로는 내삽오차가 적은 cubic B spline function을 이용하였다.

2. 본론

(1) 적분방정식 유도

해석의 대상인 spheroid와 그에 대한 spheroidal coordinates를 소개하면, prolate spheroid를 하나의 surface coordinate u로 하고, 황극선을 v로, 그리고 azimuthal angle  $\phi$ 로 구성된좌표계를 그림 1.과 같이 나타낼 수 있다.

elliptic coordinate u를 minor elliptic axis에 대하여 회전시키면 oblate spheroidal coordinate system이 되며 major axis에 대하여 rotation시킨 경우가 바로 prolate spheroidal coordinate system이다.

여기서 a는 focal point이다.

transformation equation은

$$x = a \cdot \sinh(u) \sin(v) \cos(\phi), \quad (1)$$

$$y = a \cdot \sinh(u) \sin(v) \sin(\phi), \quad (2)$$

$$z = a \cdot \cosh(u) \cos(v) \quad (3)$$

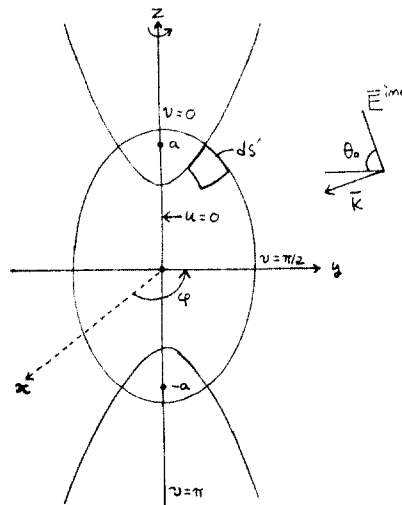


그림 1. 장구 및 좌표계

Prolate spheroid and coordinate system

이 system에 따른 scale factor는 다음과 같다.

$$h_u = a(\cosh(u) - \cos^2(v))^{1/2} = h_v, \quad (4)$$

$$h_\phi = a \cdot \sinh(u) \sin(v) \quad (5)$$

또한, 미분연산자 및 관계식은 다음과 같다.

$$\nabla = \frac{\partial}{h_u \partial u} \hat{e}_u + \frac{\partial}{h_v \partial v} \hat{e}_v + \frac{\partial}{h_\phi \partial \phi} \hat{e}_\phi \quad (6)$$

$$ds = h_u h_\phi dv d\phi \quad (7)$$

$$\nabla \cdot \vec{J} = \frac{1}{h_u h_v h_\phi} \left[ \frac{\partial}{\partial u} (J_u h_v h_\phi) + \frac{\partial}{\partial v} (J_v h_u h_\phi) + \frac{\partial}{\partial \phi} (J_\phi h_u h_v) \right] \quad (8)$$

자유공간에 한 도체가 존재할 때, 총전계는 도체 표면에 유기되는 표면전류에 의해 다음처럼 나타낼 수 있다.<sup>(9)</sup>

$$E(R) = E^{inc}(R) - i \frac{\eta}{4\pi R} \left[ \frac{\partial}{\partial R} \nabla \cdot \vec{J}(R') \right] G(R, R') ds' + \frac{\eta}{4\pi R} \left[ \frac{\partial}{\partial R} \nabla \cdot \vec{J}(R') \right] G(R, R') ds' \quad (9)$$

여기서  $E^{inc}$ : 입사전계

$J$ : 도체표면에 유기된 표면전류

$k$ : 전파상수

$\eta$ : intrinsic wave impedance of free space

$R$ : differential surface element  $ds$ 까지의 반지름 벡터

$$\text{그리고, } G(R, R') = \frac{\exp[-i k |R - R'|]}{|R - R'|} \quad (10)$$

(9)식을 다시 쓰면

$$\vec{E} = \vec{E}^{inc} + \vec{E}^s \quad (11)$$

여기서 EBC를 적용시켜 observation point를 도체의 내부에 취하고 내부에서의 총전계를 zero로 놓는다. 또한  $v$  성분에 대하여 고려하면

$$E_v^{inc} \Big|_{u=0} = -E_v^s \Big|_{u=0} \quad (12)$$

$\hat{e}_\phi$  성분 즉  $u=0$  일때 구간  $-L/2 \sim L/2$ 사이의 총전계는 zero이므로 또한 BOR의 경우 azimuthal angle  $\phi$ 에 관계없이  $r$ 은 일정하므로 (10)식의 green function을 다음과 같이 쓸수있다.

$$G(R, R') = a \left[ \frac{(\sinh(u') \sin(v'))^2 + (\cos(v) - \cosh(u'))^2}{\cos(v')^2} \right]^{1/2} \quad (13)$$

(6)식은

$$\nabla = \frac{\partial}{\sinh v \partial v} \quad (14)$$

(7)식은

$$ds' = a^2 \sinh(u') \sin(v') \left( \sinh^2(u') + \sin^2(v') \right)^{1/2} d\phi' dv' \quad (15)$$

(8)식은  $J_\phi$  성분이 존재하지 않으므로 다음처럼 표현된다.

$$\nabla \cdot \vec{J}(R') = \frac{1}{h_u h_v h_\phi} \left[ \frac{\partial}{\partial u} (J_u h_u' h_\phi') + \frac{\partial}{\partial v} (J_v h_u' h_\phi') \right] \quad (16)$$

한편 회전체의 중심축상의 임의의 곳에서  $\phi$  방향으로  $v$  성분의 표면전류를 주회적분하면 spheroid의 단면을 통과하는 총전류가 되므로

$$I_v' = \int_0^{2\pi} d\phi' J_v' a \cdot \sinh(u') \sin(v') \quad (17)$$

이상의 (14), (15), (16), (17)식을 (12)식에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$i \frac{4\pi a}{\eta} E_v^{inc} \Big|_{u=0} = \int_0^{2\pi} dv' \left[ \frac{1}{a \sinh v'} \frac{\partial}{\partial v'} + \frac{\cos v'}{a \sinh v' \sin v'} \frac{\partial}{\partial v'} + k^2 h_v' \right] I_v' G(v, v') \quad (18)$$

입사전계는 plane wave가 입사하는 경우를 고려하였다.

$$E_v^{inc} \Big|_{u=0} = E_0 \sin(\theta_0) \exp[-i k \cos(\theta_0) \cdot a \cdot \cos(v)] \quad (19)$$

여기서

$E$ : 전계의 amplitude

$\theta_0$ : z축과 평면파의 전달방향이 이루는 각도

## (2) numerical analysis

적분방식의 해를 구하는데 있어 computer technique으로는 내적을 이용한 직접적인 matrix equation으로의 변환인 moment method를 사용하였다. 내적의 정의에 따른 또 한번의 적분계산을 피하기 위하여 point matching을 썼으며 expansion function으로는 그 우수성이 입증된바 있는<sup>(6)</sup> cubic B spline function을 사용하였다.

(18)식에서 전류분포를 구함에 있어서 양끝점에서 zero가 되도록 homogeneous dirichlet boundary condition을 적용하였으며 이를 만족시키기 위하여 expansion function을 선형조합하였으며 이에 따른 expansion 수의 감소 및 CPU time을 절약할 수 있었다.

## 3. DATA

표1에서 Taylor와 Wilton이 입증한 결과치와 비교하였다. eccentricity  $e=0.99$ 인 prolate spheroid의 단면을 통과하는 총전류를 조사한 것이며 파장과 안테나 길이와의 비에 의해 결정된 값이다. 이에 근거하여 eccentricity에 변화를 가함에 따른 prolate spheroid의 전류분포 및 전계의 입사각에 따른 특성을 조사하였다.

표 1. 장구의 중심단 전류

Prolate Spheroid Center Current			
kL/2	I(L/2)		
	Taylor Solution		New Solution
1.212	8.126 + i 14.38		8.106 + i 14.38
1.586	27.35 + i 0.2883		27.36 + i 0.3002
2.020	18.22 - i 10.07		18.21 - i 10.06
2.380	15.18 - i 10.53		15.18 - i 10.53
2.525	14.65 - i 10.58		14.65 - i 10.59
2.828	14.12 - i 10.83		14.10 - i 10.83
3.030	14.01 - i 11.20		13.99 - i 11.12
3.173	13.96 - i 11.60		13.94 - i 11.61
3.232	13.94 - i 11.81		13.92 - i 11.82

4. 결론

전자장 문제를 해결함에 있어 경계를 하나의 좌표로 이용하면 approach가 용이하다는 점에 착안하여 spheroidal coordinate system을 써서 spheroidal antenna의 전류분포를 해석하였다. Taylor와 Wilton의 결과치와 일치함을 보였으며 이에 근거하여 eccentricity가 다른 prolate spheroid에 대하여서도 전류분포 및 입사각에 따른 특성을 조사하였다.

REFERENCES

- [1] R. Redlich, "On the Extended Boundary Condition as Applied to the Dipole Antenna Problem," IEEE Trans., Antennas Propagat., Vol. AP-32, No. 4, pp.403-404, April 1984
- [2] R.F. Harrington, "Field Computation by Moment Methods," New York: Macmillan, 1968
- [3] W.A. Davies, "Splines for Electromagnetics," IEEE Trans., Antennas Propagat., Vol. AP-30, No. 4, pp. 760-764, July 1982
- [4] G. Arfken, "Mathematical Methods for Physicists," Academic Press, 2nd ed., pp.103-108, 1970
- [5] C.D. Taylor, et al., "The Extended Boundary Condition Solution of the Dipole Antennas of Revolution," IEEE Trans., Antennas Propagat., Vol. AP-29, No. 6, pp.771-773, November 1982
- [6] Je-Hoon Yun, "The Current Distribution of Revolution-Body Antennas with Extended Boundary Condition," Master thesis, Chung Ang Univ., December 1985

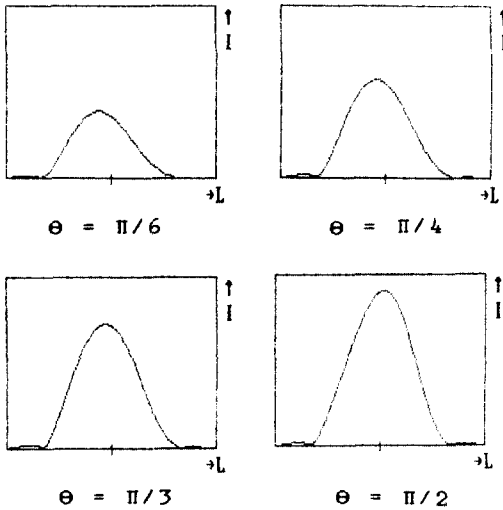


그림 2. 입사각에 따른 장구의 전류분포

The current distribution of prolate spheroid at each impressed angle

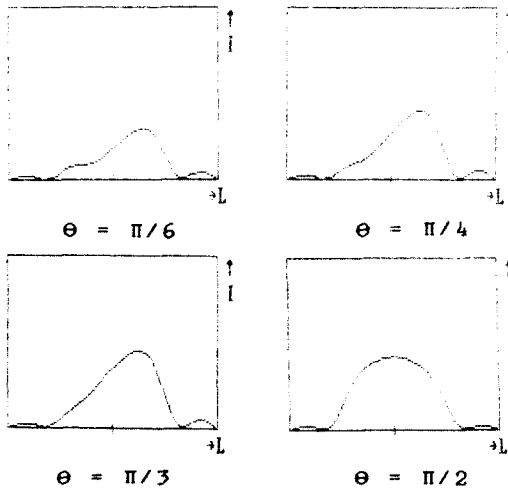


그림 3. 입사각에 따른 장구의 전류분포 <2>

The current distribution <2>