

길이 가 유한한 선접촉의 탄성유체운할

박 태 조 김 경 응
(KAIST 생산공학과)

1. 서론

로울러 베어링의 로울러는 길이방향으로 적당하게 Profiling 하여 양단부에서 발생하는 응력집중을 줄이고 있다. 로울러와 레이스간의 접촉을 단순한 탄성접촉문제로 해석하는 경우에는 유막의 개념이 없기서 로울러와 레이스 사이의 압력분포나 유막형상을 정확하게 나타내기가 어려우므로 탄성변형과 압력에 따른 윤활유의 점도변화를 고려한 탄성유체운할(EHL) 해석이 필요하다. 대부분의 해석은 무한장 로울러로 취급하는 것이 보통이며 실제의 로울러에 해당하는 유한한 길이의 선접촉 EHL 해석은 Mostofi & Gohar⁽¹⁾ 및 Kuroda & Arai⁽²⁾의 해석 정도이나 각각은 수평하중이 작거나 로울러의 길이가 아주 짧은 경우에 해당한다.

본 연구에서는 FDM 과 Newton-Raphson method를 이용하여 길이 가 유한한 실제 크기의 Profiled 로울러에 대한 EHL 상태에서의 압력분포나 유막형상을 보다 하중이 큰 경우에 대해서 구하고자 한다.

2. 이론

문제를 간단히 하기 위해서 다음과 같은 가정을 사용하였다. 1) 로울러와 레이스의 탄성변형량은 각각을 탄성반무한체라 가정하여 계산한다. 2) 윤활유는 비압축성이며 등온 조건하에서 운전한다.

2-1 레이놀즈 방정식

윤활유는 다음의 레이놀즈 방정식을 만족한다.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 12U \frac{\partial h}{\partial x} \quad (1)$$

여기서 $\eta = \eta_0 e^{\alpha p}$ 이며 $U = \frac{1}{2}(u_1 + u_2)$ 로 x 방향의 평균속도이다.

2-2 유막 및 하중관계식

$$h = h_0 + h_g + h_v \quad (2)$$

여기서 h_0 는 상수, h_g 는 로울러 형상에 의한 유막 및 h_v 는 다음식으로 주어지는 탄성변형에 의한 유막이다.

$$h_v = \frac{2}{\pi E} \iint \frac{p(x_1, y_1) dx_1 dy_1}{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}} \quad (3)$$

하중과 발생압력은 다음 관계가 있다.

$$w = \iint p dx dy \quad (4)$$

2-3 경계조건

계산영역의 경계에서 압력은 0이며 출구쪽에서는 레이놀즈 경계조건식 ($p = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0$)을 만족한다.

3. 수치계산

(1), (2) 및 (4)식을 $X=r/R, Y=z/R, H=r/R, P=p/E, \bar{\eta}=\eta/\eta_0, U=\eta_0 v/R E, \eta=\alpha E, W=w/R^2 E$ 의 무차원 변수를 사용하여 무차원화한다. 여기서 R 은 로울러의 반경, E 는 reduced Young's modulus, η_0 는 입구부에서의 점도 및 α 는 윤활유의 압력-점도 계수이다. 이때 (3)식의 좌변은 Hamrock & Dowson^[3]의 방법으로 계산하였다. 무차원화된 식을 유한차분법 형태로 바꾸면 다음식과 같이 된다.

$$f_{j,l}(P_{k,l}) = \frac{H_{i+1/2,j}^2}{\eta_{i+1/2,j}} (P_{k+1,j} - P_{k,j}) - \frac{H_{i-1/2,j}^2}{\eta_{i-1/2,j}} (P_{k,j} - P_{k-1,j}) + \left(\frac{\Delta X}{\Delta Y}\right)^2 \left\{ \frac{H_{i,j+1/2}^2}{\eta_{i,j+1/2}} (P_{k,j+1} - P_{k,j}) - \frac{H_{i,j-1/2}^2}{\eta_{i,j-1/2}} (P_{k,j} - P_{k,j-1}) \right\} - 12U\alpha X (H_{i+1/2,j} - H_{i-1/2,j}) = 0 \quad (5)$$

$$(i, k = 2, \dots, M-1, \quad j, l = 2, \dots, N-1)$$

$$W = \sum_{k=2}^{M-1} \sum_{l=2}^{N-1} P_{k,l} \Delta X \Delta Y \quad (6)$$

미지수 $H_0, P_{i,j}$ 를 구하기 위해서 (5)식에 Newton-Raphson method를 적용하면,

$$\sum_{k=2}^{M-1} \sum_{l=2}^{N-1} \frac{\partial f_{j,l}}{\partial P_{k,l}} (P_{k,l}^{m+1} - P_{k,l}^m) + \frac{\partial f_{j,l}}{\partial H_0} (H_0^{m+1} - H_0^m) + f_{j,l}^m = 0 \quad (7)$$

(6)식과 (7)식을 동시에 풀면 $(m+1)$ 번째의 미지수 $H_0, P_{i,j}$ 를 구할 수 있다. 수치계산에 사용된 계산영역은 그림 1.과 같으며 a, b 는 각각 탄성점역학적 footprint의 중앙부에서의 반폭과 footprint 길이의 절반이다. Node는 X 방향으로 56개, Y 방향으로는 로울러 반경이기에 대해서 13개로 나누었다. 사용한 로울러의 축방향 profile은 crowning (그림 2.)으로 $b_0/R = 0.7, R_c/R = 100$ 인 원통형 로울러이다. 최종적인 수렴 판정은

$$\text{error} = \frac{\sum_{k,j} |P_{k,j}^{m+1} - P_{k,j}^m|}{\sum_{k,j} P_{k,j}^{m+1}} \text{가 } 10^{-5} \text{ 이하가 될}$$

경우이다.

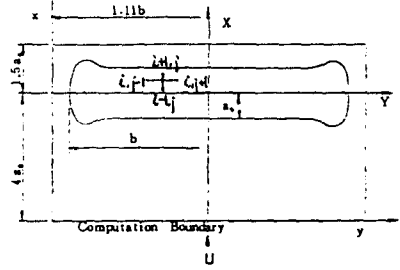


그림 1. EHL 수치계산 경계 및 Grid

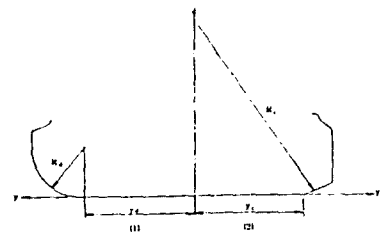


그림 2. 일반적인 로울러 축방향 profile (1) Dub-off (2) Crowning

4. 결과 및 고찰

그림 3과 그림 4는 각각 $\epsilon = 2000$ 과 $\epsilon = 2500$ 인 경우의 압력분포를 로울러 길이의 절반에 대해서 로울러의 한쪽 끝에서 본 형상이다. 구름방향의 출구측에서 압력 spike가 나타나며 이는 ϵ 가 큰 경우에 더욱 크게 나타난다. 또, 로울러 길이방향으로 crowning부 부근에서의 압력구배도 더 커짐을 알 수 있다. 그림 5와 그림 6은 그림 3과 그림 4에 대응하는 유막형상으로 로울러의 중심에서 한쪽 끝으로 본 그림이다. 구름방향의 출구측에서 유막의 construction이 생기며 crowning부에서는 유막이 급격하게 증가한다. 그림 7과 그림 8은 그림 3 ~ 그림 6에 대응하는 그림으로 $X^* = \frac{y}{a_0} = -0.5, 0, 0.4$ 및 0.8 에서 로울러 길이방향으로의 압력분포와 유막두께를 $\epsilon = 2000$ 과 2500 에 대해서 나타낸 것이다. 여기서 P_s 는 Heydari & Gohar^[4]의 방법으로 구한 탄성정역학적 압력분포이다. 각 경우에 대해서 로울러의 길이방향 중앙부에서는 로울러 길이방향으로 압력과 유막형상이 거의 일정하나 crowning 시작전 부근에서는 압력과 유막의 변화가 심하다. 또, 최고 압력은 crowning 시작전보다 길이방향으로 더 안쪽의 회전방향 출구측에서 발생한다. 최소유막의 위치는 crowning 시작전 부근의 출구측에서 생기는 것을 알 수 있다. EHL 해석의 압력분포는 탄성정역학적 해석에 의한 압력분포와 상당히 다르다. 그림 9와 그림 10은 $\epsilon = 2000$ 인 경우에 로울러 중심과 crowning 시작점에서 로울러 중심으로 가장 가까운 node에서 구름방향의 압력분포와 유막형상을 나타내었다. 로울러 중앙부에서는 무한장 로울러로 가정된 2차원 해석과 3차원 해석의 압력분포와 유막형상이 거의 비슷하나 crowning 시작전 부근에서는 차이가 크다. 그림 11과 그림 12는 $\epsilon = 2500$ 인 경우의 2차원 해석결과와 3차원 해석결과를 비교한 것이다. ϵ 가 클수록 출구측의 압력 spike가 선명해지는 것을 알 수 있으며 $\epsilon = 2000$ 인 경우와 마찬가지로 로울러 중앙부에서는 잘 일치하고 있으나 crowning부 부근에서는 차이가 크다. 그림 3 ~ 그림 4, 그림 7 ~ 그림 12에서 알 수 있듯이 로울러 길이 방향의 끝부분으로 갈수록 압력이 급격히 감소하고 있다. 이는 side leakage의 영향이 가장 지배적이라고 생각된다. 이상의 결과 유한한 길이의 로울러 베어링을 해석할 때 2차원 EHL 해석으로 profiling이 시작되는 부분에서의 압력분포와 유막형상을 정확히 예측하는 것은 본질적으로 edge의 영향을 전혀 무시하고 있으므로 3차원 EHL 해석이 필수적이다.

5. 결론

길이 가 유한한 로울러의 EHL 해석을 FDM과 Newton-Raphson method를 사용하여 수행하였다. 이 결과 로울러의 중앙부에서는 무한장 로울러로 가정된 해석결과와 3차원 해석결과가 거의 일치하지만 중앙에서 멀어질수록 차이가 크게 된다. 3차원 해석결과에 의하면 최고압력과 최소유효막이 Profiling 부 부근의 출구측에서 발생하게 되며, 그 크기도 무한장 로울러 가정의 결과와 다르다. 따라서, 길이가 유한한 선접촉의 EHL 해석에는 3차원 해석이 필수적이며 본 연구에서 한 가지의 해석 방법을 제시하였다.

후기

본 연구는 한국종합기계(주)의 연구비 지원으로 수행되었음을 밝히며 한국종합기계(주)에 감사하는 바입니다.

참고문헌

1. A. Mostofi and R. Gohar, "Elastohydrodynamic Lubrication of Finite Line Contacts", ASME J. of Lub. Tech., vol. 105, 1983, pp. 598-604.
2. S. Kuroda and K. Arai, "Elastohydrodynamic Lubrication between Two Rollers (Finite Width Analysis)" Bull. of JSME, vol. 28, No. 241, 1985, pp. 1367-1372.
3. B. J. Hamrock and D. Dowson, "Isothermal Elastohydrodynamic Lubrication of Point Contacts Part I: Theoretical Formulation", ASME J. of Lub. Tech., vol. 98, 1976, pp. 223-229.
4. M. Heydari and R. Gohar, "The Influence of Axial Profile on Pressure Distribution in Radially Loaded Rollers", J. of Mech. Eng. Sci., Vol. 21, No. 6, 1979, pp. 381-388.

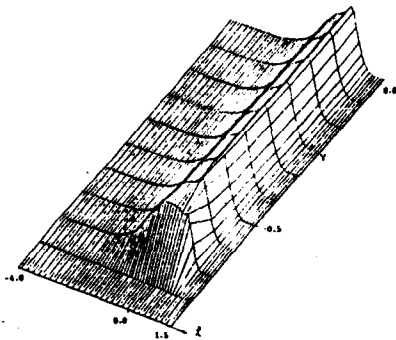


그림 3. EHL 해석에 의한 압력분포 $Y_c = -0.7$, $R_c^* = 100$, $U = 1.995 \times 10^{-11}$, $G = 2000$, $W = 3 \times 10^{-8}$

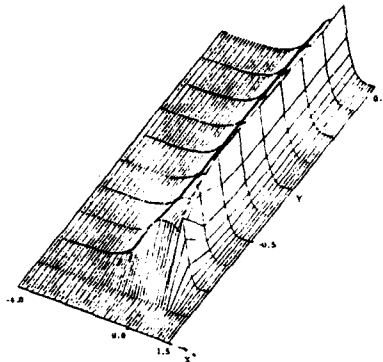


그림 4. EHL 해석에 의한 압력분포 $Y_c = -0.7$, $R_c^* = 100$, $U = 1.995 \times 10^{-11}$, $G = 2500$, $W = 3 \times 10^{-8}$

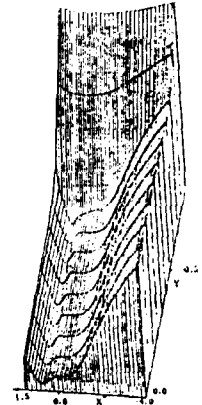


그림 5. EHL 해석에 의한 압력분포 $Y_c = -0.7$, $R_c^* = 100$, $U = 1.995 \times 10^{-11}$, $G = 2000$, $W = 3 \times 10^{-8}$

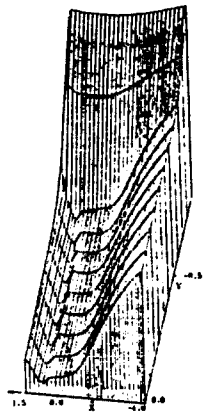


그림 9. 비선형 해석에 의한 유압형상 $Y_c = -0.7$,
 $K_c^2 = 100$, $U = 1.995 \times 10^{-11}$, $G = 2500$,
 $W = 3 \times 10^{-5}$

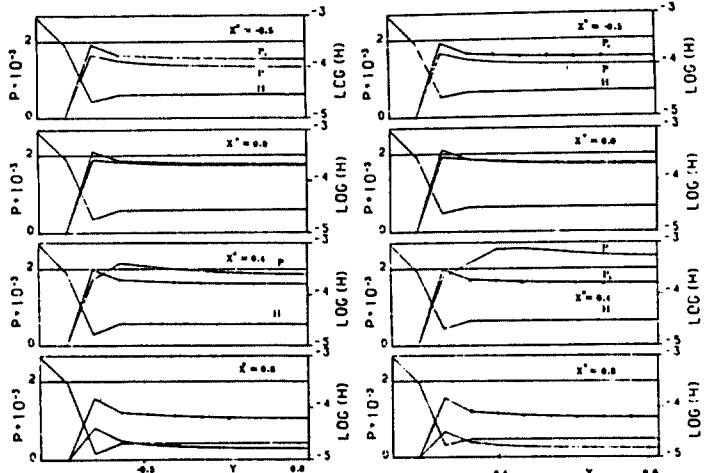


그림 7. 보울러 깊이방향의 압력분포 및 유속
 두께방향의 $Y_c = -0.7$, $K_c^2 = 100$, $U = 1.995 \times 10^{-11}$, $G = 2500$, $W = 3 \times 10^{-5}$

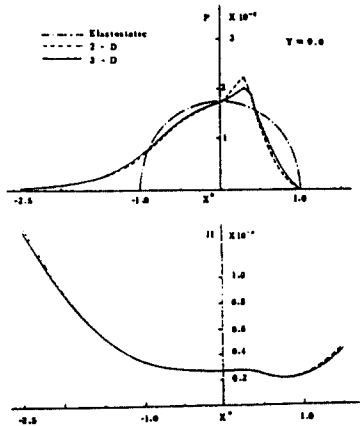


그림 9. 보울러 깊이방향의 압력분포 및 유속형상
 $Y_c = -0.7$, $K_c^2 = 100$, $U = 1.995 \times 10^{-11}$,
 $G = 2000$, $W = 3 \times 10^{-5}$

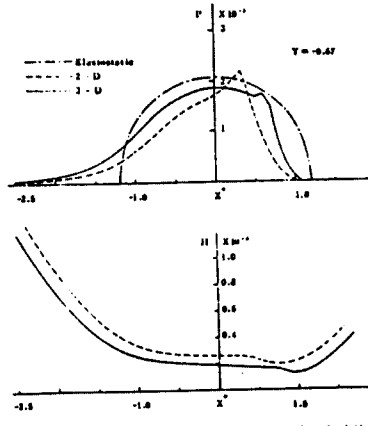


그림 10. 보울러 깊이방향의 압력분포 및 유속형상
 $Y_c = -0.7$, $K_c^2 = 100$, $U = 1.995 \times 10^{-11}$,
 $G = 2000$, $W = 3 \times 10^{-5}$

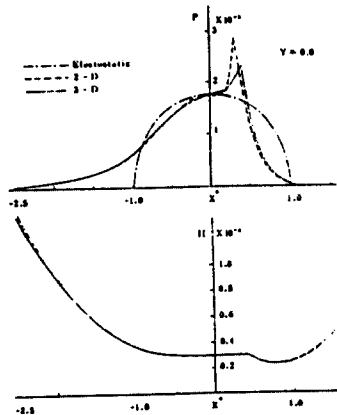


그림 11. 보울러 깊이방향의 압력분포 및 유속
 형상 $Y_c = -0.7$, $K_c^2 = 100$, $U = 1.995 \times 10^{-11}$,
 $G = 2500$, $W = 3 \times 10^{-5}$

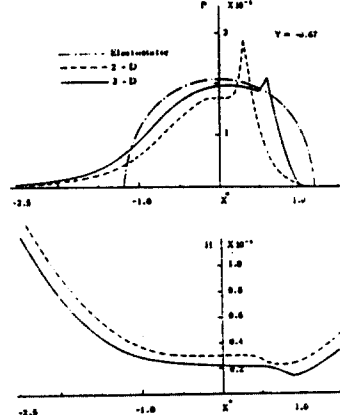


그림 12. 보울러 깊이방향의 압력분포 및 유속
 형상 $Y_c = -0.7$, $K_c^2 = 100$, $U = 1.995 \times 10^{-11}$,
 $G = 2500$, $W = 3 \times 10^{-5}$