6. 海底地形變化에 依한 波의 變形에 관한 硏究

蔚山大學校 副教授(工博) 金聲得

海底地形變化에 依한 波浪의 數値解析
Numerical Analysis of Wave Propagation by Bottom Variation

蔚山大 工科大學 副敎授 金贊得
울산대 대학원 이성대*

1. 序論

해양파 연구에서 관심의 대상이 되는 문제중의 하나는 해저지형이 불연속적으로 변화하는 경우에 파랑이 어떻게 변형하는가를 예측하고 그 기구(Mechanism)를 명확히 하는 것이다. 해저 바닥이 불연속적인 규칙성으로써 변화하는 경우 파의 변형에 관한 이론적 해석 방법으로써는 기하학적변화 영역을 등각사상하여 해석하거나 속도포텐셜의 고유함수 전개에 의해 각각의 세부영역에 대한 해를 연직경계에 접합하여 구하는 방법 등이 있다. 또한 이같은 유체영역에 대한 경계치 문제를 수치해석 방법으로써 경계상에 속도포텐셜에 대한 적분방정식을 얻기 위하여 Green 정리를 이용하고 특이점을 분포시키는 積分方程式法 이나 變分原理 에 의한 有限要素法에 의한 解析 연구가 있다.

본 연구에서는 수치해석법으로써 Green 제2정리에 따르는 기본해 (free space Green's function)를 문제대상의 전영역에 대해 그 경계를 요소화하여 수치적분을 행하는 경계요소법을 이용하여 파가 기하학적 불연속 해저 변화영역에 임의 방향으로 입사하는 경우에 파의 반사및 전달 효과에 관해서 연구하였다. 이에 관한 연구는 井島와 Kirby 등에 의한 일정요소를 사용한 예가 있으나 여기에서는 선형요소를 이용하여 해석한 본 연구자의 결과를 傾斜入射波의 경우로 확장하여 解析을 行하였으며, 이의 結果를 다른 解析法의 結果와 比較하여 검증하였다.

2. 경계치 문제

유체운동을 비점성 완전유체의 미소진폭파 운동이라 가정하고 좌표계는 그림 1과 같이 나타낸다.

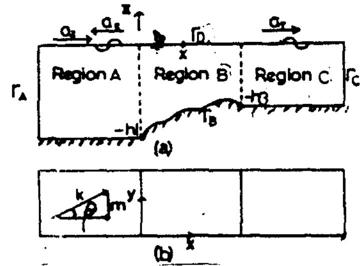


Fig. 1 Definition sketch and coordinate system.
(a) elevation (b) plan

그러면 속도포텐셜 $\phi(x, y, z, t)$는 다음과 같이 쓸수 있다.

$$\phi(x, y, z, t) = \Phi(x, z)\, e^{i(my - \sigma t)} \qquad -(1)$$

여기서, $m = k_A \sin\theta$ 이며, 직각입사파의 경우 $m = 0$, 斜入射波의 경우 $0 < m < k_A$ 이다. Laplace 方程式에 (1)식을 代入하면 다음과 같은 変形 Helmholtz 方程式을 얻는다.

$$\text{전체 유체 영역에서,} \quad \nabla^2\Phi - m^2\Phi = 0 \qquad -(2)$$

(2)식은 다음의 경계조건을 만족한다.

$$\begin{cases} \text{자유수면 상에서,} \quad \dfrac{\partial\Phi}{\partial z} = \dfrac{\sigma^2}{g}\Phi & -(3) \\ \text{해저 바닥 상에서,} \quad \dfrac{\partial\Phi}{\partial n} = 0 & -(4) \\ \text{radiation condition,} \quad \dfrac{\partial\Phi}{\partial x} = \begin{cases} i l_A \Phi - 2 i l_A \Phi_I & : \text{상단측} \\ i l_C \Phi & : \text{하단측} \end{cases} & -(5) \end{cases}$$

여기서, 입사파의 속도포텐셜은 다음과 같다.

$$\Phi_I = -\frac{ig \cosh k_A (h+z)_A}{\sigma \cosh k_A h_A}\, e^{i l_A x} \qquad -(6)$$

그리고 $l_i = \sqrt{k_i^2 - m^2}$ $(i = A, B, C)$ 이다.

영역 A와 C에서 상기 경계치 문제를 만족하는 일반해는 다음과 같다.

$$\Phi_A = \Phi_I - \frac{igR \cosh k_A (h_A + z)}{\sigma \cosh k h_A}\, e^{-i l_A x} \qquad -(7)$$

$$\Phi_C = \frac{-igT \cosh k_C (h_C + z)}{\sigma \cosh k h_C}\, e^{i l_C x} \qquad -(8)$$

여기서, k는 다음과 같은 分散關係로 부터 얻어지며

$$\sigma^2 = gk \tanh kh \qquad -(9)$$

R과 T는 각각 반사 및 전달계수를 나타낸다.
회절파에 대한 에너지 보존법칙으로 부터 다음의 조건을 얻는다.

$$R^2 + T^2 \left\{ \frac{n_C\, k_A^2\, l_C}{n_A\, k_C^2\, l_A} \right\} = 1 \qquad -(10)$$

여기서, $$n_i = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2k_i h_i}{\sinh 2k_i h_i}\right) \quad i = A, B, C \qquad -(11)$$

3. 경계요소 방정식과 수치해석

(2)~(5)식에 나타낸 경계치 문제를 풀기 위하여 가중잔차형을 도입하며, 속도포텐셜 Φ에 Green 제2정리를 그리고 (2)식에 가중함수인 기본해를 적용하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\Phi^i + \int_\Gamma \left(\Phi \frac{\partial \Phi^*}{\partial n} - \Phi^* \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) d\Gamma = 0 \qquad -(12)$$

여기서, Φ^i는 Dirac delta 함수의 정의로 부터 얻어지는 요소내부의 점 i에서의 미지 속도포텐셜이며 가중함수 Φ^*는 2次元 等方인 경우에 다음과 같이 된다.

$$\left.\begin{aligned} \Phi^* &= -\frac{1}{2\pi} \ln(r) \quad ; m = 0 \\ \Phi^* &= \frac{1}{2\pi} K_0(mr) \quad ; 0 < m < k_A \end{aligned}\right] \qquad -(13)$$

여기서, r은 요소내부의 점 i에서 경계면에 이르는 거리이며, K_0는 2종 0차 변형 Bessel 함수이다.
만일 점 i를 경계면 위에 두고 생각한다면 (2)~(5)식의 경계조건을 고려하여 영역의 전경계를 n개의 요소로 분할하여 (12)식을 다음과 같이 쓸수가있다.

$$C^i \Phi^i + \sum_{n1} \int_{\Gamma_j} \left(\Phi_j \frac{\partial \Phi^*}{\partial n} - i l_A \Phi^* \right) d\Gamma + \sum_{n2} \int_{\Gamma_j} \Phi_j \frac{\partial \Phi^*}{\partial n} d\Gamma +$$
$$+ \sum_{n3} \int_{\Gamma_j} \Phi_j \left(\frac{\partial \Phi^*}{\partial n} - i l_C \Phi^* \right) d\Gamma + \sum_{n4} \int_{\Gamma_j} \Phi_j \left(\frac{\partial \Phi^*}{\partial n} - \frac{\sigma^2}{g} \Phi^* \right) d\Gamma =$$

$$= \sum_{n_l} \int_{\Gamma} (2 i l_A \dot{\Phi}_I \Phi^*) d\Gamma \qquad -(14)$$

여기서, C^i는 경계가 매끈한 경우에는 $\frac{1}{2}$이나 일반적으로 점 i가 위치하는 경계요소의 모양에 따른다. 그리고 n_l는 경계 Γ_l상의 요소에 해당한다.

(14)식을 풀기위하여 그림 2와 같은 선형요소를 생각하면, 요소의 임의점에서 Φ와 $\partial\Phi/\partial n$의 값은 선형보간 함수 φ_1과 φ_2는 절점값에 의해서 정의되는데, 이것을 (14)식의 各 積分項에 적용하면 다음과 같이 된다.

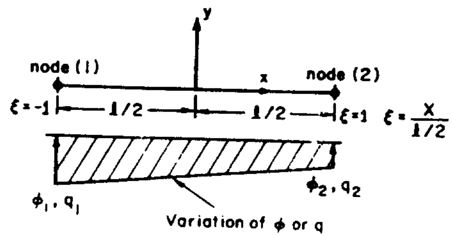


그림 2. 선형요소

$$\int_{\Gamma_j} \Phi_j \frac{\partial \Phi^*}{\partial n} d\Gamma = \int_{\Gamma_j} [\varphi_1\ \varphi_2] \frac{\partial \Phi^*}{\partial n} d\Gamma \begin{Bmatrix} \Phi^1 \\ \Phi^2 \end{Bmatrix} = [h_{j1}\ h_{j2}] \begin{Bmatrix} \Phi^1 \\ \Phi^2 \end{Bmatrix} \qquad -(15)$$

$$\int_{\Gamma_j} \Phi_j \Phi^* d\Gamma = \int_{\Gamma_j} [\varphi_1\ \varphi_2] \Phi^* d\Gamma \begin{Bmatrix} \Phi^1 \\ \Phi^2 \end{Bmatrix} = [g_{j1}\ g_{j2}] \begin{Bmatrix} \Phi^1 \\ \Phi^2 \end{Bmatrix} \qquad -(16)$$

여기서, Φ^1과 Φ^2는 절점 1 과 2 에서의 절점값이다.(그림 2)

그리고, $\varphi_1 = \frac{1}{2}(1-\xi)$, $\varphi_2 = \frac{1}{2}(1+\xi)$, $\xi = \frac{x}{2/l}$ 이다.

$i \neq j$인 경우, 상기 (15)식과 (16)식은 Gauss 積分公式에 의해 수치적으로 계산된다. $i=j$인 경우 (15)식은 n과 Γ의 직교성에 의해 0가 되고 (16)식의 성분 g_{j1}과 g_{j2}는 解析積分을 行하면 다음과 같이 된다.

<직각입사파의 경우 ; $m=0$>

$$\left.\begin{aligned} g_{j1} &= \frac{\Delta S}{2\pi}\left(0.5 \ln \frac{1}{\Delta S} + 0.75\right) \\ g_{j2} &= \frac{\Delta S}{2\pi}\left(0.5 \ln \frac{1}{\Delta S} + 0.25\right) \end{aligned}\right] \qquad -(17)$$

<傾斜入射波의 경우; $0 < m < k_A$>

$$\left.\begin{aligned} g_{j1} &= \frac{1}{2\pi}\left(0.75 - \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2} \ln \frac{m}{2}\Delta S\right) \\ g_{j2} &= \frac{1}{2\pi}\left(0.25 - \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2} \ln \frac{m}{2}\Delta S\right) \end{aligned}\right] \qquad -(18)$$

여기서, ΔS는 요소의 길이이며 γ는 Euler 상수($\gamma = 0.5772156$)이다.

(15)식과 (16)식의 各項을 (14)식에 代入하여 정리하면 다음과 같은 行列式을 얻는다.

$$\left[H_{ij} - G_{ij} \begin{Bmatrix} i\ell_A \\ 0 \\ i\ell_C \\ \sigma^2/g \end{Bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} \Phi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{ij} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -2i\ell_A \Phi_I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad -(19)$$

(19)식으로 부터 속도포텐셜 Φ를 계산하고 이로부터 수면형과 波高를 구하고 또한 反射및 傳達係數를 計算할수 있다.

4. 계산 결과 및 분석

4.1 단락부에 적용한 경우

해저수심이 矩形의 단락에 의해 변화하는 경우에 직각입사파에 의한 波의 반사효과를 그림(3)과 (4)에 나타내었다. 이의 결과는 井島의 결과와 비교하였다. 경사단락의 경우 수심이 $h_1 (x \le 0)$에서 $h_2 (x \ge L)$까지 경사면 $S (= (h_2 - h_1)/L)$가 $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$로 변화하는 경우에 대해 고려하였다($h_2/h_1 = 0.2$). 이의 결과는 완경사 방정식과 Kirby의 중간 경사 방정식의 해석해와 비교하였다 (그림 5, 6)

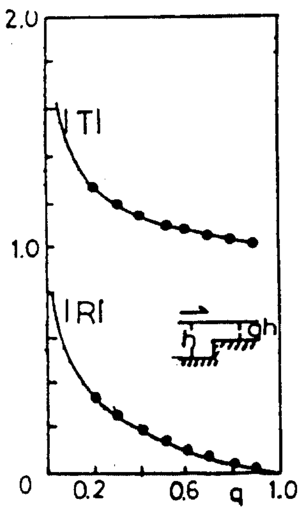


그림 3. 反射및 전달계수

● ; present result

— ; Ijima's result

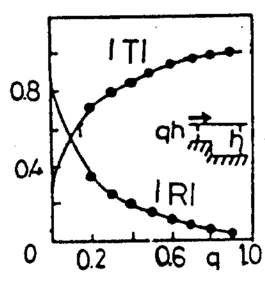


그림 4. 反射및 전달계수

● ; present result

— ; Ijima's result

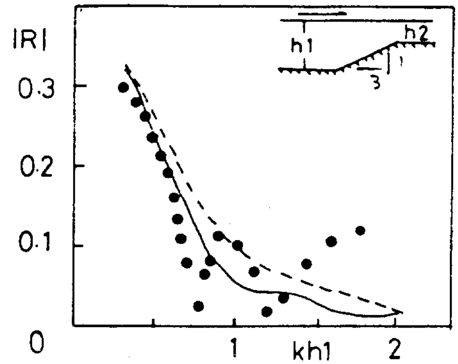


그림 5. 傾斜 단각 (경사 $\frac{1}{3}$) 에서의 反射係數 •; present result
—; mild slope eq.
—; moderate slope eq.

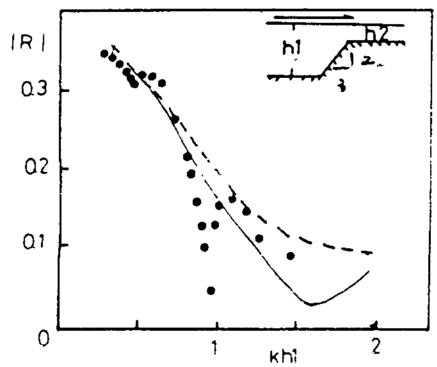


그림 6. 경사 단각 (경사 2/3) 에서의 반사계수 •; present result
-----; mild slope eq.
——; moderate slope eq.

4.2 불투과 潛堤에 적용한 경우

구형잠제에 임의방향으로 입사하는 파의 反射및 傳達 特性은 ($\theta=0°$, $30°$) 井島 ~~의연구~~결과와 비교하였다. (그림 7)
사다리꼴잠제의 경우 수심에 대한 天端幅比 $b/h=0.5$, 1.0에 대해 전후면에 1:1, 1:2의 경사를 가진 경우(그림 8, 9) 와 전후면에 1:1, 1:2의 경사를 가진 삼각형潛堤에 (그림 10) 各各 적용하였다. 본 결과를 검증하기 위하여 측벽경사 1:2의 사다리꼴 잠제의 경우에 식 10을 적용한 결과 만족할만한 결과를 얻었다. (표 1)

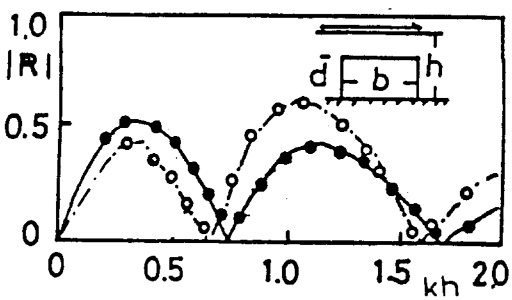


그림 7. 잠제에서의 반사계수.
o; present result —·—·—
; Ijima's result (1982). ($\theta=30°$)
•; present result. —; Ijima's result (1991)

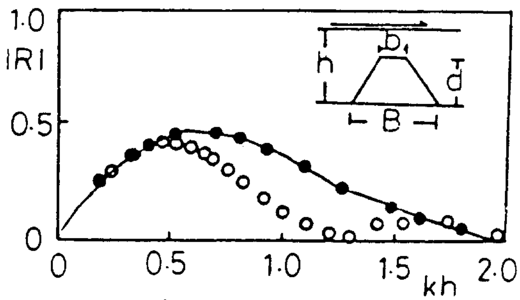


그림 8. 사다리꼴 잠제에서의 반사계수
•, o; present result
•; 1:1 (side slope) o; 1:2 (side slope), —; Ijima et al (1982)

kl	T	R	T²+R²	Error(%)
0.92	0.9820	0.1876	0.9996	0.04
0.82	0.9681	0.250	0.9999	0.01
0.76	0.9523	0.3069	1.0001	0.01
0.68	0.9401	0.340	0.9995	0.05
0.60	0.9207	0.3902	1.0000	0.00
0.52	0.9101	0.4168	1.0007	0.07

표1. 사다리꼴 잠제에서의 전달및 반사계수
(측벽경사 1:2)

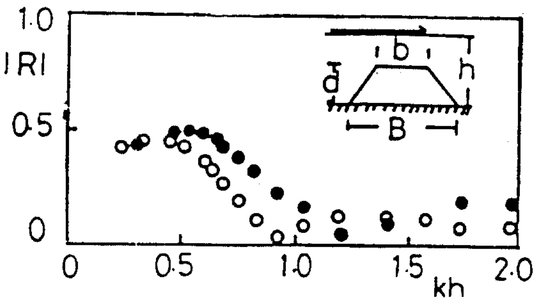


그림.9 사다리꼴 잠제에 대한 反射계수
●; 측벽경사 1:1 ○; 측벽경사 1:2
($b/h=1.0$, $d/h=0.7$)

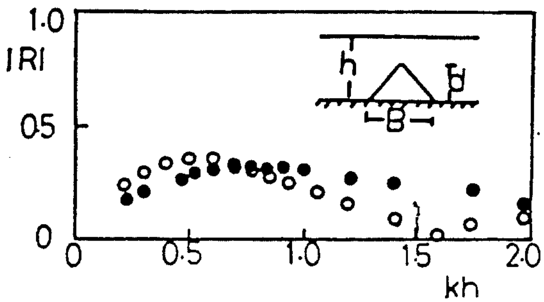
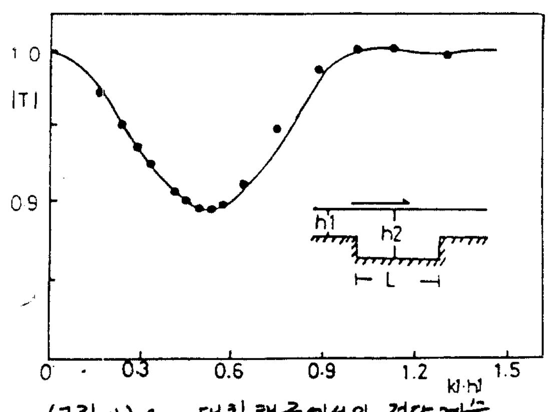


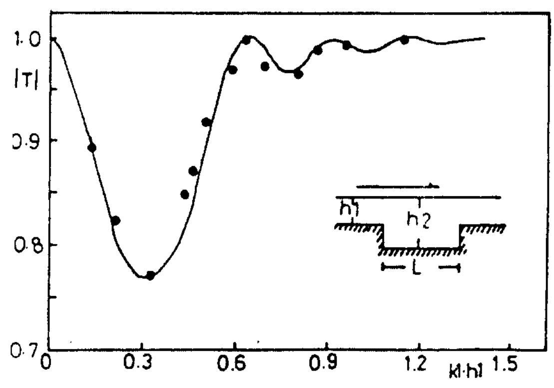
그림10. 삼각형 잠제에 대한 反射계수
●; 측벽경사 1:1 ○; 측벽경사 1:2
($b/h=0$, $d/h=0.7$)

4.3 海溝에 적용한 경우

대칭海溝(trench)에 의한 波의 反射및 傳達效果를 검토하기위하여 임의 방향으로 입사하는 경우 ($\theta=0°, 45°$)에 대해 Lee와 Ayer와 Kirby와 Dalrymple의 연구 결과와 비교하였다.(그림 11, 12)



(그림 11)-a, 대칭해구에서의 전달계수
$h_2/h_1=7.625$ $L/h_1=5.28$



(그림 11)-b 대칭해구에서의 전달계수
$h_2/h_1=7.625$, $L/h_1=10.56$