河川流出의 推計學的模型

李 槿澈 慶熙大學校 敎授
朴 正熙 慶熙大學校 大學院生

Ⅰ. 序 論

自然의 現象으로 나타나는 流出量時系列은 一般的으로 非定常時系列로서 이들의 分析은 部分時系列로 나누어 實施할 수 있으나 定常時系列의 理論은 適用되지 않는다. 이러한 時系列에 對하여 Box & Jenkins 理論의 硏究가 있으며, 또한 Rao 等은 部分時系列의 概念을 導入, 月流出量時系列의 模型化에 成功하였다.

本 硏究는 月降雨量資料와 月流出量資料로 Box & Jenkins의 代替函數模型 (確定成分)에다 ARIMA模型 (任意誤差成分)을 加한 型式으로 誘導하는 것이다. 이러한 技法이 非定常時系列인 河川流出量時系列을 分析, 豫測하여 韓國河川을 상대로 土木計劃에 最適運營體系로 위해서 많이 利用될 것이 기대된다.

Ⅱ. 月流出量의 推計學的 模型式의 誘導

2-1. 有効降雨高 算出

月降雨量과 月流出量의 實記錄系列數値로 하되 代替函數模型에 任意誤差를 合한 推計學的模型式에 月間變化係數를 삽입한 模型基本式을 나타내면 다음과 같다.

$$Y_t = v(B)\,x_t + N_t \quad \cdots\cdots (1)$$
$$x_t = C_i X_t$$

C_i : i 月別의 流入率
$v(B)$: filter의 代替函數
x_t : 유효강우고
N_t : t月의 잡음오차.

2-2. 資料의 持續性 檢査

2-2-1. 系列相關係數 計算

$$r_k = \frac{C_k}{C_0} = \frac{\sum_{t=1}^{N-k}(y_t-\bar{y})(y_{t+k}-\bar{y})}{\sum_{t=1}^{N}(y_t-\bar{y})^2} \quad \cdots\cdots (2)$$

C_k : 자동공분산 함수
C_0 : $k=0$ 일때의 값 즉 분산

2-2-2. Collelogram의 比較

持續性 판별방법: 簡略法(Approximate test), 正解法(Exact test), 點轉換法(Turning point test)

正解法 $CL(r_1) = -\frac{1}{N-1} \pm 1.96 \frac{N-2}{(N-1)^{3/2}}$ ⋯(3)

2-2-3. 暫定的인 模型의 確立

$$x_t = (1-B)^d X_t = \nabla^d X_t \qquad y_t = (1-B)^d Y_t = \nabla^d Y_t$$

여기서 x_t, y_t는 평균 0, 分散 σ_x, σ_y인 白色雜音이며 差分時系列.

2-3. 代替函數模型과 白色模型.

2-3-1. 確定成分.

과거의 入力(降雨量) 및 出力(流出量) 數値가 여과과정에서 동일하다는 線型模型式은 다음과 같다.

$$\delta(B) Y_t = W(B) X_t \qquad \cdots(4) \qquad B: \text{後方移動操作}$$

또한 入·出力數値間에는 線型여과시에는 直結關係가 된다고 할수있으므로

$$Y_t = V_0 X_t + V_1 X_{t-1} + V_2 X_{t-2} + \cdots\cdots = V(B) X_t \qquad \cdots(5)$$

이는 두 多項式의 비율로 表示하면.

$$Y_t = V(B) X_t = W(B) / \delta(B) \, X_t \qquad \cdots(6)$$

式(5)의 양변에 X_{t-k}를 곱해 정리하면

$$Y_{xy}(K) = V_0 Y_{xx}(K) + V_1 Y_{xx}(K-1) + \cdots\cdots \qquad K = 0, 1, 2 \ldots \qquad \cdots\cdots(7)$$

(7)式을 Matrix 法을 利用하여 V는 算出

$$\left.\begin{array}{ll} v_0 = w_0 & j = 0 \\ v_j = \delta_1 v_{j-1} + \delta_2 v_{j-2} + \cdots + \delta_r v_{j-r} - w_j & j = 1, 2 \cdots g \\ v_j = \delta_1 v_{j-1} + \delta_2 v_{j-2} + \cdots + \delta_r v_{j-r} & j > g \end{array}\right\} \cdots(8)$$

降雨는 적정 거변에 떨어지며 여과 과정을 없는것으로 보아 δ는 제외 W만을 算出한다.

2-3-2, 任意誤差項.

一般的으로 ARIMA(p, d, q)模型

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p) N_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \cdots - \theta_q B^q) a_t \qquad \cdots(9)$$

ARIMA (2, d, 2) ARIMA (1, d, 1)

$$N_t = \frac{1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2}{1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2} a_t \quad \cdots\cdots(10) \qquad N_t = \frac{1 - \theta_1 B}{1 - \phi_1 B} a_t \quad \cdots\cdots(11)$$

本유역의 河川流出時系列은 ARIMA(1, d, 1)로 검토할수 있다.

4) 白色雜音 (White Noise)의 결정

Monte Carlo 方法: 水文資料値가 持續性 不在의 경우로서 Box-Mulle 方法, Masaglia-Bray 方法, Central Limit 方法

○ Central Limit 方法: $t_t = \left(\sum_{i=1}^{N} U_t - \frac{N}{2}\right) / \sqrt{N/12}$ ···(12) $\begin{cases} U_t: \text{균등분포 난수 계열} \\ N_t: \text{균등분포 생여 변수의 수} \end{cases}$

事前白色(Prewhitening) 方法: 水文資料値가 持續性 存在인 경우.

$$a_t = \phi(B)\ \theta^{-1}(B)\ n_t \quad \cdots (13) \qquad (\text{단 } \theta = 1,\ \Delta N_t = t)$$

$$= (1 - \phi_1 B)\, n_t \qquad (\phi_1 = \rho_1)$$

5) 母數의 推定

ARIMA(1,1,1) 模型에서 이항정리 하면

$$\hat{N}_t = (1 - \theta B_a)\, a_t + \hat{N}_{t-1}(1 + \phi) - \phi \hat{N}_{t-2} \quad \cdots\cdots (14)$$

$$S(\phi, \theta) = \sum_{t=1}^{n} (N_t - \hat{N}_t)^2 : \text{最少} \quad \cdots\cdots (15)$$ ϕ와 θ를 찾고.

式(14)와 式(15)에서 ϕ와 θ를 구하고 다음식에 代入 ϕ와 θ는 決定하고 $\hat{N}_t$를 算出한다.

$$\hat{N}_t = \frac{1 - \theta B}{1 - (1+\phi)B + \phi B^2}\, a_t \quad \cdots\cdots (16) \qquad \Sigma (N_t - \hat{N}_t)^2 < \Sigma N_t^2 \quad \cdots\cdots (17)$$

2 - 4. 模型의 適合性 檢討

「포트만토」適合缺如檢定

$$Q = n \sum_{j=1}^{k} r_j^2(\hat{a}) \quad \cdots (18)$$ $\begin{cases} n: \hat{Q} \text{ 추정에 사용된 관측치수} \\ k: \text{계산한 표본자기 상관계수의 수} \end{cases}$

1) $Q > \chi^2(K-p-q)$: 부적합

2) $Q < \chi^2(K-p-q)$: 적합 (즉 模型殘差系는 "White Noise"라 다른바 없으므로 暫定的으로 설정된 模型은 適合)

R^2·Test : 精度가 良好한 式인지 아닌지는 檢定

$$R^2 = 1 - \frac{E(Y_t - \hat{Y}_t)^2}{E(Y_t - Y)} \quad \cdots (19)$$

III. 月流出量의 推計學的模型式의 誘導例.

錦江의 上流部에 位置하고 있는 龍潭流域을 대하여 推計學的模型式을 誘導하고자 한다.

有効降雨量을 算出하여 持續性 檢査를 한 결과 1次差分時系列이 持續性 存在로 나타났으며, $\nabla X_t = x_t$ $\nabla Y_t = y_t$를 利用하여 式(7)로 $\hat{y}$을 算出하고 式(8)에서 w_0, w_1 및 w_2는 變數로 誘導한다.

$$\hat{Y}_t = (0.979 + 0.024B - 0.003B^2)X_t \quad \cdots\cdots (20)$$

「포트만 토」適合缺如檢定으로 "White Noise"와 다른지 검토 결과 $Q = 30.23 < \chi^2_{0.05}(40) = 55.8$로서 代替函數模型은 適合하다.

白色雜音은 持續性 存在인 事前白色化 方法을 사용하였으며 母數推定은 式(14)를 利用하여 式(16)의 조건에 만족하는 θ와 ϕ는 구한 결과 $\phi = 0.811$, $\theta = 0.911$이었고 N_t를 算出하였다.

最終的으로 誘導된 模型式은 다음과 같다.

$$\hat{Y}_t = (0.979 + 0.024B - 0.003B^2)x_t + \frac{1-0.911B}{1-0.811B}a_t \quad \cdots (21).$$

R^2 Test : $R^2 = 0.99$로 아주 精度가 높은 式이다