

최적 제어 기법을 사용한

자동 조종 장치의 설계

°백 운 보, 이 만 영

부산대학교 공과대학 기계공학과

Robust Missile Autopilot Design Using a
Generalized Singular Optimal Control Technique

Woon-Bo Baek and Man-Hyung Lee

Dept. of Mechanical Engineering, Busan National University

Abstract

A generalized singular linear quadratic control technique is developed to design an optimal trajectory tracking system. The output feedback control law is designed using this technique. The feedback gain matrix is synthesized to minimize tracking errors with pole placement capability to satisfy the control activity requirements. An application to a bank-to-turn missile coordinated autopilot system design is presented.

1. 서 론

Mini-C³ (command, control, communication)

문제의 개념하에서 이동중인 표적을 추적하거나 요격할 수 있는 국산화 장비를 개발하는 것은 아주 중요한 일이다.

비행중인 다이나믹시스템에 있어서 페루우프 제어 시스템이 안정하고 외란과 모델링 오차하에서도 유도명령 신호를 추종할 수 있는 적응 피드-포워드 제어와 강력한 출력회환제어를 행하는 고성능 미사일이나 항공기를 위한 강력하고 종합적인 자동조종장치를 설계하는 것은 매우 유용한 일이다.

추적 제어 시스템에서 최적제어 문제들은 이론적 관점에서 광범위하게 연구되어 왔으나(1,2) 이러한 제어 계획의 실제적인 실행은 무시되어 왔다.

여기서는 추적시스템에 GSLQ 제어 (Generalized Singular linear quadratic control)를 실현하기 위해 체계적인 설계를 계획하고자 한다.

2. 본 론

1) Bank-To-Turn 제어

BIT 제어는 비행기체의 상승벡터를 목표물과 같은 평면에

오도록 하여 가속도를 증가시킴으로서 미사일 성능의 개량에 가능성을 가지고 있다.

미사일은 유도명령을 받는 즉시 그 방향의 상승을 하기전에 가속도벡터가 피치 평면에 놓이도록 먼저 회전한다. 미사일의 최대상승이 바람직한 조종방향으로 되도록 로울 제어 시스템을 급속히 회전시키며, 동시에 피치제어 시스템도 최대 상승방향으로 요구되는 가속도를 내게함으로써 급속한 응답이 얻어진다.

또한 BIT조종은 뱀재트 입구부에 주어지는 작은 미끄러짐 조건을 만족할 수 있도록 횡방향 가속도를 감소시킨다. (3,4) 그 결과 상승효율과 제어면 효과를 최대로 하는 더 바람직한 방향으로 미사일이 비행하게 된다.

BIT 자동조종장치를 설계하는데 있어 공기역학적인 카플링이 중요한 역할을 하며 안정성 문제를 유발케 한다.

그외에 피치, 로울, 요, 사이의 운동학적인 카플링, 관성의 카플링이 미사일의 횡동요율을 증가시키는데 문제가 되며 비대칭 구조에서는 더욱 심각하게 된다. 특히 한 방향으로만 진행각이 요구될 때는 매우 큰 횡동요율을 필요로 한다.

이러한 문제들의 어려움을 줄이기 위해 보다 바람직한 조종 방향으로 되도록 미사일을 회전 시키는 종합적인 CBTT가 설계되어야 한다. 그외에 피치 방향으로 요구되는 가속도를 추종할 수 있도록 해야 하며 엷 미끄러짐 조건을 만족할 수 있도록 해야 한다.(5)

이와 같이 기술되는 카플링과 조종문제를 갖는 다압력 제어 시스템 설계에 대해 GSLQ 다변수 최적제어 기술이 적합하게 된다.

2) 강건한 자동조종장치의 설계

유도, 기체부, 추진시스템에 요구되는 조건들이 자동조종장치 설계에 중요한 요소들이다. 구조가 다른면 바람직한 방향조종 (POC)도 달라지고 같은 유도 명령에 대해서도 다른 미사일운동을 하게 된다.

호우밍 미사일 성능과 목표물 요격능력을 높이기 위해 전 비행조건에 대해 일정한 이득을 가지며 급속하게 응답하고 외란에 대응하는 BIT 최적제어기를 설계해야만

한다.

제어기에 고려되는 사항을 들면 다음과 같다. (5,6)

- (1) 작동범위에서의 모든 비행조건들
- (2) 고도의 진행각, 큰 횡동요율로 인해 서로 연성되는 비 선형성, 모델링 불확정성
- (3) 센서, 액츄에이터의 특성
- (4) 레이더 오차
- (5) 공기역학으로 인한 응답변화

먼저 특별한 비행조건에 대해 일정한 이득을 가지는 제어기를 설계한 다음 안정여유, 미사일 성능, 돌풍과 같은 외란에 대응하는 면에서 일관되도록 전 비행조건에 적용시키고자 한다.

위에서 설명된 제어기의 설계과정은 페루우프 시스템의 안정도 대역폭, 시스템 성능에 관한 요구조건에 근거를 두게 되는데 시스템 성능은 프랜트와 측정에서의 램덤 외란에 대해 공분산 해석기술에 의해 평가되며, 안정도 대역폭은 페루우프 시스템의 고유치의 위치에 따라 결정되는데 전 비행조건에 대한 주파수 응답 해석, 시간응답 시뮬레이션으로 제어기의 강건한 정도를 평가하고자 한다.

3) GSLQ제어에 대한 이론

LQ 이론을 사용한 추적제어 시스템의 설계는 다음의 다이내믹 상태방정식과 관측 방정식에 대해 3)과 같이 주어지는 평가함수를 최소화하는 것이다.

$$\dot{X} = AX + BU \quad (1)$$

$$Y = CX \quad (2)$$

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \{ (Y - Y_r)^T Q (Y - Y_r) + U^T R U \} dt \quad (3)$$

여기서

Q : 음이 아닌 대칭 행렬

R : 양의 대칭행렬

A, B, C : 공칭 비행조건에서의 시스템 행렬

Y_r : 바람직한 시변 - 궤적 벡터

(3)식에서 제어 입력에 가중치 R을 주는 것은 성능 지수를 최소화하는 것에 바람직하지 못하게 될 수도 있다.

그 결과 정상상태 추적 오차가 생기게 된다.

이것을 피하기 위해 제어입력항을 포함하고 있지 않는

다음의 평가 함수를 고려해 보자.

$$\dot{X} = AX + BU + B_f f \quad (4)$$

$$Y = CX + H \quad (5)$$

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (Y - Y_r)^T Q (Y - Y_r) dt \quad (6)$$

여기서 (4)식의 $B_f f$ 는 시스템의 비선형성과 외란으로 부터 생기는 구동함수이고 (5)식의 H는 관측 비선형성과 불확정성으로 구성된다.

위에서와 같이 제어 입력에 가한 가중치 R이 항상 0으로 되는 이러한 유형의 문제를 GSLQ 제어라고 한다. 실제적인 제어의 응용에 흥미를 끄는 많은 최적 제어들은 일반성을 잃지 않고 GSLQ 문제로 공식화될 수 있다.

평가함수에나 상태식에 제어 입력에 대한 2차항이 포함되어 있지 않는 이러한 GSLQ 문제에 Pontragin의 최소원리를 적용하면 그 해는 bang-bang 형이거나 singular의 성격을 띠게 되는데 bang-bang 제어는 미사일 제어 시스템에서는 실현이 불가능하다. (8)

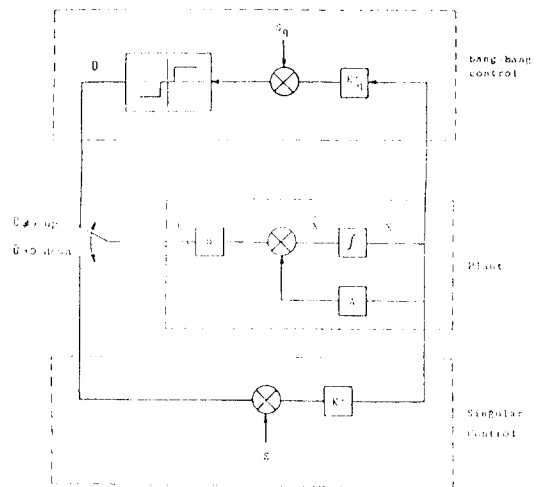


Figure 1. GSLQ control system with a order of singularity

SA (singular arc) 를 포함하는 제어 문제에 대한 접근 방법은 Goh의 변환에 의해 새로운 상태공간을 정의하여 평가함수에 포함되어 있지 않는 입력이 원래의 상태변수와 새로운 입력의 2차항으로 나타나게 하는 것이다. (2,9,10)

일반적으로 이러한 변환은 특이차수 q_1 (the order of singularity) 에 의존하게 되는데 각 제어 입력에 대한 특이차수를 합한 전체 특이차수 만큼 Goh의 변환을 하면 Pontragin의 최소원리로부터 제어입력에 관한 정보를 얻어낼 수 있는 제어 문제 (Nonsingular) 로 바뀌게 된다.

Goh의 변환은 새로운 제어입력, 상태변수를 다음과 같이 정의한다.

$$\dot{U}_1 = U \quad (7)$$

$$X_1 = X - BU_1 \quad (8)$$

식(8)을 미분하여 식(4), (6)에 대입하면

$$\dot{X}_1 = AX_1 + ABU_1 + B_f f \quad (9)$$

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (CX_1 + CBU_1 - Y_r)^T Q (CX_1 + CBU_1 - Y_r) dt \quad (10)$$

여기서 $B^T C^T C B$ 가 양이면, 일반적으로

$$b_i^T (A^T)^{q_i - 1} C^T Q C A^{q_i - 1} b_i > 0 \quad (11)$$

이면 보통 제어 문제가 된다.

q_i : The order of singularity (11)

$\bar{q} = q_1 + q_2 + \dots + q_L$

$B = [b_1, b_2, \dots, b_L]$

각 제어 입력에 대한 특이수가 같다고 두면
GLC (Generalized Legendre-Clebsch) 조건이
만족됨을 볼 수 있다.

$$(-1)^q \frac{\partial}{\partial U} \left[\frac{d^2 q}{dt^2} \left(\frac{\partial H}{\partial U} \right) \right] = B^T (A^T)^{q-1} Q A^{q-1} B \geq 0 \quad (12)$$

\bar{q} 만큼 Goh 의 변환을 행하면 아래와 같이 된다.

$$\dot{\bar{X}} = \hat{A} \bar{X} + \hat{B} \hat{U} + B_f f \quad (13)$$

$$\bar{Y} = C \bar{X} \quad (14)$$

$$J = \frac{1}{2} \int_0^t [-2Y_r^T \hat{Q} \bar{Y} - 2Y_r^T Q P \hat{U} + \bar{Y}^T \hat{Q} \bar{Y} + \hat{U}^T \hat{R} \hat{U}] dt \quad (15)$$

여기서

$$\hat{R} = P^T Q P \quad (16)$$

$$\hat{Q} = Q - Q P \hat{R}^{-1} P^T Q \quad (17)$$

$$\hat{A} = A [I - \hat{B} \hat{R}^{-1} P^T A C] \quad (18)$$

$$\hat{B} = A \hat{B} \quad (19)$$

$$\hat{U} = \bar{U} + \hat{R}^{-1} P^T Q \bar{Y} \quad (20)$$

$$P = C \bar{B} \quad (21)$$

$$\bar{B} = [A^q q_1^{-1} b_1, A^q q_2^{-1} b_2, \dots, A^q q_L^{-1} b_L] \quad (22)$$

$$U^T = \left[\frac{d^q \bar{u}_1}{dt^q q_1}, \frac{d^q \bar{u}_2}{dt^q q_2}, \dots, \frac{d^q \bar{u}_L}{dt^q q_L} \right] \quad (23)$$

$$\bar{U}^T = [\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_L] \quad (24)$$

그러나 이렇게 변환된 문제의 Riccati 해는 Riccati
행렬이 0가 되어 그해를 직접 구할 수 없다. (10)

여기서는 Riccati 행렬이 양이 되도록 원래의 시스템에
서 \bar{q} 만큼 차수를 줄이는 방법을 쓰자 한다.

\bar{q} 만큼 차수를 줄이는 변환을 행하면 아래와 같다.

$$\dot{X}' = \psi \hat{A} \phi_1 X' + \psi \hat{B} \hat{U} + \psi B_f f \quad (25)$$

$$\bar{Y} = C \phi_1 X' \quad (26)$$

$$J = \frac{1}{2} \int_0^t [-2Y_r^T \hat{Q} \bar{Y} - 2Y_r^T Q P \hat{U} + \bar{Y}^T \hat{Q} \bar{Y} + \hat{U}^T \hat{R} \hat{U}] dt \quad (27)$$

여기서

$$X' = \psi \bar{X}$$

$$\psi \phi_1 = I, \quad \phi_1 : nx(n-\bar{q})$$

$$\psi \phi_2 = 0, \quad \psi : (n-\bar{q})xn$$

$$\phi_2 = [B : AB : A^2 B : \dots : A^{q_L-1} B] \quad (28)$$

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = \phi^{-1}, \quad \phi = [\phi_1, \phi_2] \quad (29)$$

이제, Pontragin 의 최소 원리를 적용하면

$$H = -Y_r^T \hat{Q} \bar{Y} - Y_r^T Q P \hat{U} + \frac{1}{2} \bar{Y}^T \hat{Q} \bar{Y} + \frac{1}{2} \hat{U}^T \hat{R} \hat{U} \\ + \lambda^T (\psi \hat{A} \phi_1 X' + \psi \hat{B} \hat{U} + \psi B_f f) \quad (30)$$

$$\dot{\lambda}(t) = -\phi^T C^T \hat{Q} C \phi X' - \phi^T \hat{A}^T \lambda + \phi^T C^T \hat{Q} Y_r \quad (31)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \hat{U}} = -P^T Q Y_r + \hat{R} \hat{U} + \psi \hat{B} \lambda = 0 \quad (32)$$

$$\hat{U} = -\hat{R}^{-1} (\hat{B}^T \psi^T \lambda - P^T Q Y_r) \quad (33)$$

따라서

$$\begin{bmatrix} \dot{X}' \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi \hat{A} \phi_1 & -\psi \hat{B} \hat{R}^{-1} \hat{B}^T \psi^T \\ & -\phi^T C^T \hat{Q} C \\ & & -\phi^T \hat{A}^T \psi^T \\ & & & \psi B_f f + \psi \hat{B} \hat{R}^{-1} P^T Q Y_r \\ & & & & \phi^T C^T \hat{Q} Y_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X' \\ \lambda \end{bmatrix} \quad (34)$$

λ 를 다음과 같이 두면

$$\lambda(t) = T(t) X'(t) + g(t) \quad (35)$$

양변을 미분하면

$$\dot{\lambda} = \dot{T} X' + T \dot{X}' + \dot{g} \quad (36)$$

식 (35), (36)을 (34)에 대입하면

$$\dot{T} = -T \psi \hat{A} \phi_1 - \phi^T \hat{A}^T \psi^T T + T \psi \hat{B} \hat{R}^{-1} \hat{B}^T \psi^T T \\ - \phi^T C^T \hat{Q} C \phi \quad (37)$$

$$\dot{g} = -(\phi^T \hat{A}^T \psi^T T - T \psi \hat{B} \hat{R}^{-1} \hat{B}^T \psi^T T) g \\ - T(\psi B_f f + \psi \hat{B} \hat{R}^{-1} P^T Q Y_r) + \phi^T C^T \hat{Q} Y_r \quad (38)$$

경계 조건

$$T(t_f) = 0 \quad (39)$$

$$g(t_f) = 0 \quad (40)$$

식 (33), (35), (20) 식으로 부터

$$\bar{U} = \hat{R}^{-1} P^T Q \bar{Y} = -R^{-1} (\hat{B} \psi^T T + P^T Q C \phi) \psi \bar{X} \\ - \hat{R}^{-1} \hat{B}^T \psi^T T g(t) + \hat{R}^{-1} P^T Q Y_r = \bar{K} \bar{X} + \bar{S} \quad (41)$$

따라서

$$\bar{K} = -\hat{R}^{-1} (\hat{B} \psi^T T \psi + P^T Q C) \quad (42)$$

$$\bar{S} = -\hat{R}^{-1} \hat{B}^T \psi^T T g(t) + \hat{R}^{-1} P^T Q Y_r \quad (43)$$

원좌표로의 역변환을 행하기 위해 다음과 같이 표기
하기로 한다.

$$\bar{K}^T = [K_1 q_1^T, K_2 q_2^T, \dots, K_L q_L^T] \quad (44)$$

$$\bar{S}^T = [S_1 q_1, S_2 q_2, \dots, S_L q_L] \quad (45)$$

$$\bar{U}^T = [U_1 q_1, U_2 q_2, \dots, U_L q_L] \quad (46)$$

$$U^T = [U_1, U_2, \dots, U_L] \quad (47)$$

2번째 첨자 표기는 q_i 번째 변환된 좌표를 말한다.

원 좌표로 역변환된 제어 입력은

$$U = K X + S \quad (48)$$

여기서

K : 피이드-백 이득행렬

S : 피이드-포워드 제어

식 (7), (8), (23), (24)로 부터

$$U_{ij} = \frac{d}{dt} (U_{ij+1}) \\ = \frac{d}{dt} (K_{ij+1} X_{j+1} + S_{ij+1}) = K_{ij} X_j + S_{ij} \quad (49)$$

여기서

$$K_{ij} = K_{ij+1} + K_{ij+1} A \quad (50)$$

$$S_{ij} = S_{ij+1} + K_{ij+1} B_f f \quad (51)$$

K_{ij}, S_{ij} 로 부터 $K_{i0}(=K), S_{i0}(=S)$ 가 얻어질 때까지
계산해 오면 식 (48)은 다음의 형태로 된다.

$$K^T = [K_1^T, K_2^T, \dots, K_L^T] \quad (52)$$

$$S^T = [S_1, S_2, \dots, S_L] \quad (53)$$

식 (25) - (29)의 차수를 줄이는 기술은 계산시간을 상당
히 줄여줄 뿐만 아니라 SAE 를 만족하지 않을 수도 있는 초기
응답 동안에 추적오차를 최소화 하기 위해 다음과 같은
 ψ 를 선정함으로써 페루우프 시스템의 고유치를 바람직한
곳에 위치하게 할 수 있다. 따라서 식 (48)은 다음과
같이 조정된다.

$$U = [K + \frac{q}{s}] K_j X + [S + \frac{q}{s}] K_j S_j \quad (54)$$

여기서 K_j 는 설계자에 의해 선정되는 6개의 설계변수로서 6개의 고유치가 아래의 다항식의 근이 되도록 한다.

$$\lambda^6 + K_1 \lambda^5 + \dots + K_5 \lambda + K_6 = 0 \quad (55)$$

GSLQ 최적 추적 시스템은 그림 2의 블록선도로 요약된다.

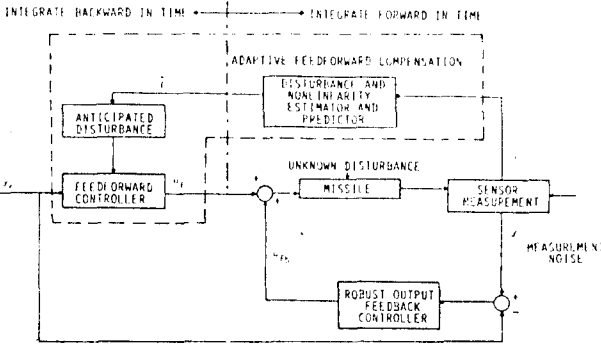


Fig. 2 Robust tracking autopilot design of BTT homing missile.

3. 시뮬레이션

평면날개, 십자형 꼬리를 가지는 미사일을 모델로 하여 BTT 자동조종장치 설계에 GSLQ 제어 기술을 적용시키고자 한다. 미사일 시스템에 대한 상태변수, 제어입력, 출력 바람직한 출력은 다음과 같다.

$$X^T = [q, w, r, v, p, \delta p] \quad (56)$$

$$U^T = [\delta q_c, \delta r_c, \delta p_c] \quad (57)$$

$$Y^T = [n_p, n_y, p] \quad (58)$$

$$Y_f^T = [n_{pc}, n_{yc}, p_c] \quad (59)$$

여기서

p, q, r : 횡동요율, 종동요율, 선수동요율

w, v : 동체축 x, y 방향의 속도 성분

$\delta p, \delta q, \delta r$: 횡동요, 종동요, 선수동요, 제어면 변형량

n_p, n_y : 종동요, 선수동요 가속도

그런데 n_p, n_y 는 w, v 보다 측정이 쉬우므로 상사변환에 의해 w, v 는 n_p, n_y 로 대체시켜 상태변수를 재 설정하면 새로운 좌표계에서 미사일 시스템의 동역학식은 다음과 같다.

$$\dot{\bar{X}} = \bar{A}\bar{X} + \bar{B}U + \bar{B}_f f(t) \quad (60)$$

여기서

$$X^T = [\delta p, q, n_p, r, n_y, p]$$

$\bar{A}, \bar{B}, \bar{B}_f$: A, B, B_f 로부터 상사변환된 행렬

표 1에서 6개의 비행조건은 무게에 비해 큰 추력을 가지는 경전투기를 요격하는 미사일의 6자유도 실험의 결과에서 선택된 것이다. (13)

미사일은 1만 피트 상공에서 마하 1.2의 초속도로 비행되고 그때 적 전투기는 최대선회 반경으로 책략비행하는 것으로 한다.

표 1. 최종의상동안 6개의 비행조건

프렌트	마 하 수	고 도 (ft)
1	1.89	10,180
2	2.21	10,570
3	2.40	10,860
4	2.97	11,860
5	2.77	13,000
6	2.59	13,710

그때 프렌트 1에 따른 시스템행렬 $\bar{A}, \bar{B}, \bar{B}_f$ 는 다음과 같다.

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -180.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3.333 & 0.5920 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -505.2 & -7.391 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.6888 & -14.07 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 122.6 & -1.793 & 0 \\ 304.7 & 0 & 0 & 0 & 36.70 & -9.66 \end{bmatrix} \quad (61)$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 180.0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -250.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 256.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (62)$$

$$\bar{B}_f f = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \frac{I_x - I_x}{I_y} p r + 5 \sin 10t \\ 0 \\ 10 \frac{I_x - I_y}{I_x} p q + \sin 10t \\ 0 \\ 10 \frac{I_y - I_z}{I_x} q r + 10 \sin 10t \end{bmatrix} \quad (63)$$

식 (63)에서 I_x, I_y, I_z 는 각 주축에 대한 관성모멘트, 10 rad/s 정현파 외란은 각각 종동요, 선수동요, 횡동요 방향으로 5, 1, 10 rad/s의 진폭을 가지는 것으로 한다.

Riccati 식 (37)은 정상상태 응답을 사용함으로써 간단히 될 수 있으며 GSLQ 기술에 의해 추적자동 조정장치의 최적제어는 표 1의 프렌트 1에 대해 그림 3의 결과로 시뮬레이션 되었다. 여기서 n_{pc}, n_{yc}, p_c 는 동시에 명령된다.

적응피이드-포워드 제어를 갖는 경우에 종동요, 선수동요 가속도의 시뮬레이션이 큰 외란에도 불구하고 우수한 추적 성능을 보여 준다. 그림 3에서 보는 바와 같이 횡동요율 또한 명령된 횡동요율에 가까이 추적한다. 적응 피이드-포워드 가 없는 경우에는 시뮬레이션 결과 큰 추적오차를 나타내며 크게 진동한다.

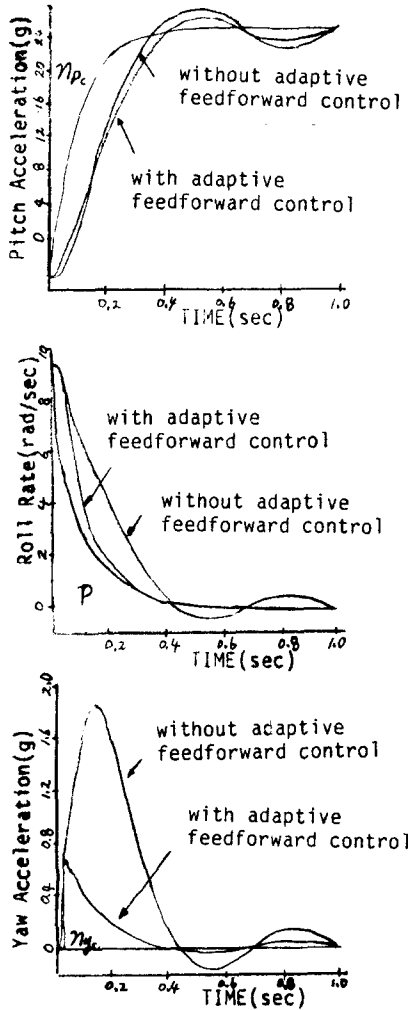


Fig.3 Simulations with sinusoidal wave disturbances and pitch roll, and yaw nonlinear couplings.

4. 결론

GSLQ 제어 기술을 사용한 미사일의 자동조종 장치는 강력한 출력제한 제어기와 적응 피이드-포워드 루우프로 구성되어 미사일의 최종위상 동안에 마하 1.9-2.6 고도 1만-1만 4천 피이드의 범위에서 6가지 비행조건에 대해 안정화 시킬 수 있었다.

주어진 경험파 외란과 낮은 회전비로 인한 비선형 카플링의 영향아래 BIT 명령 추적에 우수한 성능을 보여 주었다.

차수를 줄이는 기술은 피이드 백 이득을 수치계산 할 수 있도록 할 뿐 아니라 계산 시간을 상당히 줄여준다. 또한 적당한 상태변수를 선정함으로써 불필요하게 피이드-백 되는 상태변수를 줄이고 바람직하지 못한 초기 시스템 응답을 제거할 수 있다.

GSLQ 제어 기술은 출력 제한 제어 문제, 적응 제어 문제, 명시모델 순응문제, 적응능력을 갖는 추적시스템 설계, 그외 많은 실제적 응용예의 잠재적 가능성을 가지고 있다.

1. Bell, D.J. and Jacobson, D.H., Singular Optimal Control Problems, Academic Press, New York, 1975.
2. Goh, B.S. "Optimal Singular Control for Multi-Input Linear System," Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 20, 1967. pp. 534-539.
3. Riedel, F.W., "Bank-to-Turn Control Technology for Homing Missiles," NASA CR-3325, April 1980.
4. Reichert, R.T., "Homing Performance Comparison of Selected Airframe Configuration Using Skid-to-Turn Steering Policies," NASA CR-3420, May 1981.
5. Arrow, A., "Status and Concerns for Preferred Orientation Control of High Performance Anti-air Tactical Missiles," AIAA Paper 83-2198, Aug. 1983.
6. Nesline, F.W. and Nesline, M., "How Autopilot Requirements Constrain the Aerodynamic Design of Homing Missiles," Proceedings of the American Control Conference, Vol.2, June 1984, pp. 716-730
7. Kirk, D.E., Optimal Control Theory, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 970.
8. Yueh, W.R. and Lin, C.F., "Optimal Controller for Homing Missile," Proceedings of the American Control Conference, Vol.2, June 1984, pp. 737-742.
9. Speyer, J.L. and Jacobson, D.H., "Necessary and Sufficient Conditions for Optimality for Singular Control Problem; Transformation Approach," Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 33, 1971, pp. 163-187
10. Lee, S.P., "Control Law Design for Generalized Singular Linear Quadratic (GSLQ) Control Problem: Theory and Applications to Tracking and Trajectory Optimization," Ph.D. Dissertation, Dept. of Aeronautics and Astronautics, University of Washington, Seattle, Dec. 1981.
11. Lewis, R.M., "Definitions of Order and Junction Conditions in Singular Optimal Control Problem," SIAM Journal of Control and Optimization, Vol. 18, Jan. 1980.
12. Lee, S.P. and Vagners, J., "Control Law Design for Generalized Singular .Q Control Problem," Proceedings of the 21st IEEE Conference on Decision and Control, Vol. I, IEEE, New York, Dec. 1982, pp. 318-320.
13. Lin, C.F., "Minimum-Time Three-Dimensional Turn to a Point of Supersonic Aircraft," Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 5, Sept.-Oct. 1982, pp. 512-520.