

# LQG/LTR 방법을 이용한 강인한 서어보메커니즘의 제어기 설계

최 중 락 · 이 장 규  
서울대학교 공과대학 제어계측공학과

A design of controller for robust servomechanism  
using LQG/LTR method.

Joong Lak Choi , Jang Gyu Lee  
Dept. of Control & Instrumentation Eng. SNU

## Abstract

The LQG/LTR method is applied to the real servomechanism with the unknown modeling error and system noise variance  $Q_2$ . The equivalent discretized LQG controller is implemented on the 16-bit microcomputer and the experimental results show the improved stability and the satisfactory performance when the noise variance  $Q_2$  is increased infinitely.

LQG/LTR을 실제 시스템에 적용하기 위한 한 방법으로써 시스템의 요구조건에 따라 연속계 LQG/LTR설계 절차로부터 설계조건을 찾아내고, 연속계에서 등가변환된 디지털 LQG를 설계하였다.<sup>7)8)</sup> 이와같은 설계절차는 시스템의 요구조건을 만족하도록 직접 디지털 LQG/LTR을 설계하는데 따르는 어려움을 극복할 수 있다. 이렇게하여 얻어진 이산계 LQG/LTR은 16bit 8086 마이크로컴퓨터로 실현하여 직류모터로 구동되는 실제 서어보 메커니즘에 적용하여 보았으며, 응답결과는 비교적 양호한 성능을 나타내 주고있다.

## I. 서 론

주파수 영역에서 Nyquist 와 Bode 에 의한 고전 제어이론과 시간영역에서의 최적제어, 확률제어등의 현대 제어이론간에 상호연결이 어려웠으나 최근에 강인한 다변수 제어(robust multivariable control)에도 고전 제어개념을 도입한 설계기법이 검토되고 있다. 대표적인 것으로 Doyle & Stein의<sup>1)</sup> LQG/LTR 방법(Linear Quadratic Gaussian/Loop Transfer Recovery method)를 들수 있는데 주파수 영역에서 강인성의 척도로 singular value를 이용하여 LQG 설계방법에 의해 원하는 loop-shaping을 갖도록 하는 것이다.

이외에도 Wolovich<sup>2)</sup>와 Davison<sup>3)</sup>에 의한 구조적으로 강인한 제어기 설계방법, 고전적인 개념을 다변수 시스템에 확장한 Rosenbrock의<sup>4)</sup> INA 방법(inverse Nyquist array method), MacFarlane<sup>5)</sup>의 CL 방법(characteristic loci method)등이 제시되고 있다.

본 논문에서는 강인한 서어보메커니즘의 제어기 설계를 위해서 LQG/LTR 방법을 적용하여 보았다. 연속계에서 LQG/LTR의 설계절차와 관련이론들은 잘 정립되어 있으나 이산계의 LQG/LTR에 대한 강인성 특성 해석은 아직도 검토대상이 되고있다.<sup>6)</sup> 따라서 여기서는

## II. LQG/LTR 제어기설계

일반적인 피제어 시스템을 다음과 같이 고려한다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + D\omega \quad x \in R^n, \quad u \in R^m \\ y &= Cx + n \quad y \in R^r \end{aligned} \quad (1)$$

여기서  $u$  및  $y$ 는  $m$ 개의 입력 및  $r$ 개의 출력변수이고,  $x$ 는  $n$ 개의 상태변수이다. 이때 시스템 잡음과 측정잡음은 각각  $Q_0, R_0$ 로써 서로 독립적이며  $A, B, C$  및  $D$ 는 상수행렬들으로써 가제어성 및 가관측성을 만족한다고 가정한다. LQG 제어기는 상수행렬인 최적이득  $K_c$ 와 Kalman 필터의 이득  $K_f$ 로부터 기준입력  $r$ 에 대해서 다음과 같이 고려될 수 있다.<sup>9)</sup>

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= (A - BK_c - K_f C)\hat{x}(t) + K_f y(t) + Mr(t) \\ u(t) &= -K_c \hat{x}(t) + Nr(t) \end{aligned} \quad (2)$$

식(2)로부터 기준입력  $r$ 에 출력  $y$ 가 추정되도록, 즉 오차  $e = r - y$ 에 의해서만 제어되도록  $M$ 과  $N$ 를 선택하면

$$N = 0, \quad M = -K_f \quad (3)$$

로 되며, 식(2)는

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= (A - BK_c - K_f C)\hat{x}(t) + K_f (y-r) \\ u(t) &= -K_c \hat{x}(t) \end{aligned} \quad (4)$$

와 같이 된다. 기준입력  $r$ 에 출력  $y$ 가 추종되도록 설계된 식(4)의 LQG 제어기는 그림 1과 같다.

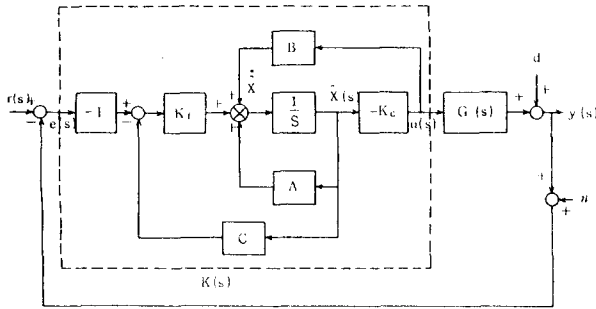


그림 1. LQG 제어기의 구성도

Fig. 1 Block Diagram of LQG Controller

그림 1에서 입력단으로부터 전달함수는

$$\begin{aligned} K(s) &= K_c [\Phi^{-1} + BK_c + K_f C]^{-1} K_f \\ G(s) &= C \Phi(s) B \\ d &= C \Phi(s) D \omega \end{aligned} \quad (5)$$

$$\Phi(s) = (sI_n - A)^{-1}$$

로 되며, 이와같은 전형적인 궤환시스템의 입출력 관계는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} y &= GK(I+GK)^{-1}(r-\eta) + (I+GK)^{-1}d \\ e &\triangleq r-y = (I+GK)^{-1}(r-d) + GK(I+GK)^{-1}\eta. \end{aligned} \quad (6)$$

식(6)으로부터  $GK$ 를 크게하면 오차  $e$ 는 기준입력  $r$ 과 외란  $d$ 에 대해 영향이 적으므로 성능이 향상되지만 잡음  $\eta$ 에 대해 민감하므로 이들간에 상호타협 (trade-off)이 필요하다. 이러한 상호타협은 LQG<sup>10)</sup> 또는 Wiener-Hopf<sup>11)</sup> 등의 설계방법에 의해 잘 이루어지고 있다. 그러나 현대제어 이론에서 이러한 상호타협 이전에 시스템의 불확실성 (uncertainty)에 대한 허용범위의 문제가 숨겨져 있다. 이 불확실성은 시스템의 제어성능인 오차  $e(j\omega)$ 와 제어입력  $u(j\omega)$ 에 고주파수 영역에서 큰 영향을 준다. 이 불확실성을 다음과 같이

$$G'(j\omega) = [I + L(j\omega)]G(j\omega) \quad (7)$$

$$\bar{\sigma}[L(j\omega)] < l_m(\omega) \quad \forall \omega > 0.$$

단,  $\bar{\sigma}$ : Singular Value의 최대값

곱셈교란 (multiplicative perturbation)으로 고려하면 다변수 경우로 일반화된 Nyquist 안정도 이론에 의한 필요충분 조건은

$$\bar{\sigma}[GK(I+GK)^{-1}] < 1/l_m(\omega) \quad \forall \omega > 0 \quad (8)$$

로 주어진다. 또한 제어성능 측면에서 식(6)으로부터  $GK$ 가 매우 커야만 기준입력에 대한 추적능력 및 외란에 대한 제거능력이 향상되므로, 즉

$$\frac{PS(\omega)}{1-l_m(\omega)} < \underline{\sigma}[GK(j\omega)] \quad \forall 0 < \omega < \infty. \quad (9)$$

단,  $\underline{\sigma}$ : Singular Value의 최소값

$PS(\omega)$ : 큰 양함수 (large positive function)

의 관계를 만족해야 한다. 식(9)의 관계는  $l_m(\omega) < 1$ 이고,  $\underline{\sigma}[G(j\omega)K(j\omega)] \gg 1$ 인 주파수영역에서 성립되어야 한다. 식(8)과 식(9)의 두조건을 그림으로 나타내면 그림 2와 같다.

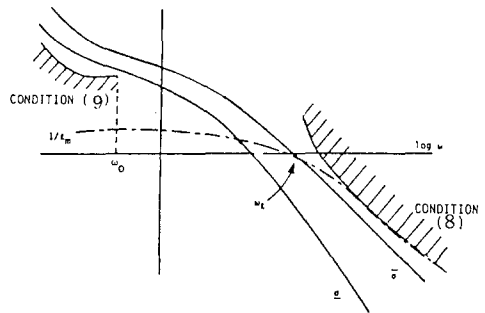


그림 2. 궤환 시스템의 loop-shaping

Fig. 2 loop-shaping of feedback system

그림 2와 같은 loop-shaping을 얻기위한 한 방법으로 LQG/LTR 방법이 적용되며, Doyle & Stein<sup>1)</sup>에 의하면 full-state LQ 제어기를 설계한 후 Kalman 필터에 의한 루프전달회복 (loop transfer recovery)을 취함으로써 강인성을 개선할 수 있게된다. 중요한 결과들을 정리하면

$$\omega_{c,max} = \bar{\sigma}[HB]/\sqrt{\rho} \quad (10)$$

$$\sigma_i[T(j\omega)] \approx \sigma_i[H\Phi(j\omega)B]/\sqrt{\rho} \quad (11)$$

$$\text{단, } T(s) \triangleq K_c \Phi(s) B$$

로써, 식(10)은 식(8)의 안정도 조건을 그리고 식(11)은 식(9)의 제어성능 조건을 각각 만족시켜주는 식들이다. 여기서  $H$ 와  $\rho$ 는 LQ 제어기의 목적함수에서 가중행렬  $Q_1 = H^T H$  및  $R_1 = \rho I$ 에 해당되며 이들에 의해서 원하는 loop-shaping을 얻을 수 있다.

Kalman 필터에 의한 루프전달 회복을 얻기 위해서 잡음은 다음과 같이 변경하여 적용한다.<sup>12)</sup>

$$Q_2 = Q_0 + q^2 BVB^T \quad (12)$$

$$R_2 = R_0$$

단,  $q$ : Scalar

$V$ : Positive definite

Symmetric Matrix

수정된 잡음인 식(12)로부터  $q \rightarrow \infty$ 로 취할때

$$\begin{aligned} K(s)G(s) &= K_c [\Phi^{-1} + BK_c + K_f C]^{-1} K_f C \Phi B \\ &= K_c \Phi B \end{aligned} \quad (13)$$

로 수렴하며, LQG 제어기의 루프전달함수  $K(s)G(s)$ 가 LQ 조절기의 루프전달함수가 되므로 안정성이 회복된다. 식(13)을 만족하기 위한 조건으로써 피제어 시스템은 최소위상 시스템 (minimum phase system)이어야 한다.

### III. 시스템적용 및 결과 고찰

#### 1. LQG/LTR 제이기 적용

앞장에서 서술된 LQG/LTR 은 다변수제어에 적용 가능하며, 여기서는 단일 임·출력 시스템인 위치제어용 서어보메커니즘을 피제어 시스템으로 고려하였다.

실제 실험적용될 서어보시스템의 상태방정식은 식(1)로부터 다음과 같다.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -a \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 0] \quad (14)$$

단,

$$X(t) = \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{bmatrix}, \quad X_1(t): \text{각위치}, \quad X_2(t): \text{각속도}$$

이때 계수 a 및 b가 영이아니면 가제어성 및 가관측성을 만족하며, 실제 시스템으로 부터 변수식별 (parameter identification)을 수행한결과  $a=62.3 \pm 10\%$ ,  $b = 4.637 \pm 10\%$ 로 나타났다. 여기서 측정 장치의 잡음분산  $R_0$ 는  $0.001 \text{ rad}^2$ 이며, 플랜트의 잡음분산  $Q_0$ 는 정확하게 알 수 없다. 이상의 정보로부터 시스템의 요구조건이

$$i) \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0 \quad (15)$$

$$ii) \omega_{c,max} = \sigma[HB]/\sqrt{\rho} \leq 12.0 \text{ rad/sec}$$

이라면, 제어성능 조건인 식(11)로부터  $\sigma[H\Phi(j\omega)B]$ 가 원하는 loop-shaping 이 되도록  $H = [h_1 \quad h_2]$ 와  $\rho$ 를 결정해야 한다. 즉

$$\sigma[H\Phi(j\omega)B] = \sigma \left[ [h_1 \quad h_2] \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+a \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} \right] \\ = \left| \frac{b(h_1+h_2S)}{s(s+a)} \right| \quad S=j\omega \quad (16)$$

의 전달함수가 그림 2에서 처럼 원하는 Bode 곡선을 갖도록 먼저 H를 결정한다.  $h_1/h_2$ 은 식(16)의 Zero에 해당되므로  $0 < h_1/h_2 < a$  조건에서 각위치  $X_1(t)$ 와 각속도  $X_2(t)$  간에 목적함수의 가중치를 고려하여  $h_1 = 1$ ,  $h_2 = 0.1$ 로 선정한다. 따라서 조건 식(15)로부터

$$H = [h_1 \quad h_2] = [1 \quad 0.1] \\ \rho \leq 1.5 \times 10^{-3} \quad (17)$$

$$\omega_{c,max} \approx 12.0 \text{ rad/sec} = 2.0 \text{ Hz}$$

로 결정된다. 식(16)은 Type 1 형태이므로 정상상태의 오차는 영으로 수렴한다. 연속계 LQG/LTR방법에서 LQ 제어기의 가중행렬은

$$Q_1 = H^T H = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.01 \end{bmatrix} \\ R_1 = \rho I = 1.5 \times 10^{-3} \quad (18)$$

로 고정하고, Kalman 필터의 잡음분산이  $R_2=R_0=0.001$

과  $Q_2=?$ 에서  $Q_2$ 를  $10, 10^2, 10^3, 10^4$ 으로 증가시켜 가면서 시스템의 응답특성을 분석해야 한다.

연속계에서 설계된 목적함수의 가중행렬 및 잡음분산 데이터로부터 샘플링시간  $\Delta T = 0.01$  초인 이산계로 등가변환 (equivalent discretization)한 수치계산 결과는 표 1과 같으며, 잡음분산  $Q_2$  값을 변화시켰을때의 디지털 Kalman 필터의 이득값은 표 2와 같다. 이때 디지털 LQG 제이기 알고리즘은 식(4)로부터 다음과 같이 동일한 구조로 등가변환 된다.

$$\hat{x}(k+1) = (\Phi - \Gamma \hat{K}_c - \hat{K}_1 C) \hat{x}(k) + \hat{K}_1 (y - r) \\ u(k) = -\hat{K}_c \hat{x}(k) \quad (19)$$

표 1. 등가이산계로 변환된 LQ 제어기의 계산결과 ( $\Delta T = 0.01 \text{ sec}$ )

Table .1 The Calculating results of equivalent-discretized LQ controller( $\Delta T=0.01 \text{ sec}$ )

Matrix	Dimension	Value
$\Phi = \Phi(\Delta T) = e^{A\Delta T}$	2 × 2	1.0                      0.744248E-2 0.0                      0.53638
$\Gamma = \Gamma(\Delta T) = \int_0^{\Delta T} \Phi(t)Bdt$	2 × 1	0.190356E-3 0.345108E-1
$Q_2 = \int_0^{\Delta T} \Phi^T(t)Q_1\Phi(t)dt$	2 × 2	0.1E-1                      0.783356E-3 0.783356E-3                0.626112E-4
$S_0 = \int_0^{\Delta T} \Phi^T(t)Q_1\Gamma(t)dt$	2 × 1	0.198835E-4 0.1140899E-05
$R_2 = \int_0^{\Delta T} (\Gamma^T(t)Q_1\Gamma(t) + R_1)dt$	1 × 1	0.1505046E-4
$\hat{K}_c$	1 × 2	0.254611E+2    0.579138

표 2. 잡음분산  $Q_2$  변화시 등가변환된 디지털 Kalman 필터의 계산결과 ( $R_2 = 0.001$ )

Table .2 The computed results of equivalent-discretized Kalman filter at changed value of  $Q_2$  ( $R_2 = 0.001$ )

case Matrix	case1	case2	case3	case4
$Q_2$	10	$10^2$	$10^3$	$10^4$
$\hat{K}_1 [2 \times 1]$	0.15817E-1 0.66780E-2	0.4853E-1 0.62276E-1	0.41138 0.512882	0.36611 0.32473E+1

#### 2. 제어기실현 및 결과 고찰

지금까지 설계된 디지털 LQG/LTR 제어기를 CPU 8086 및 NDP 8087로 구성된 마이크로컴퓨터(SYS310-3)에 실현시켜 구성한 위치제어 시스템은 그림 3과 같다.

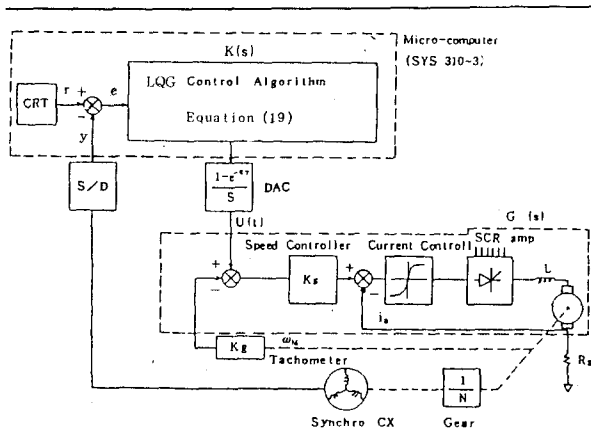


그림 3. 실험모델의 구성도

Fig. 3 Block Diagram of experimental model

디지털 제어기는 SYS 310-3 마이크로컴퓨터를 중심으로 그림 4와 같이 A/D, D/A 및 S/D 변환모듈과 CRT로 구성되어 있으며, 디지털 LQG 제어기의 알고리즘인 식 (19)는 PL/M-86 고급언어 (high level language)로 작성하여 32 bit 부동소수점 연산을 수행하였고, 프로그램의 흐름도는 그림 5와 같다.

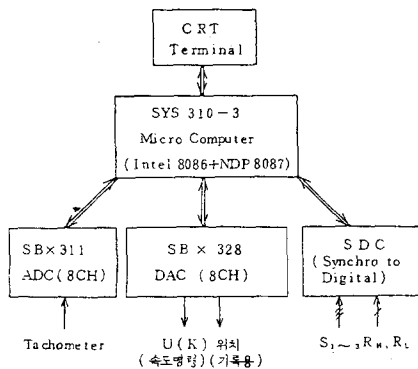


그림 4. 디지털 제어기의 하드웨어 구성

Fig.4 Configuration of digital controller

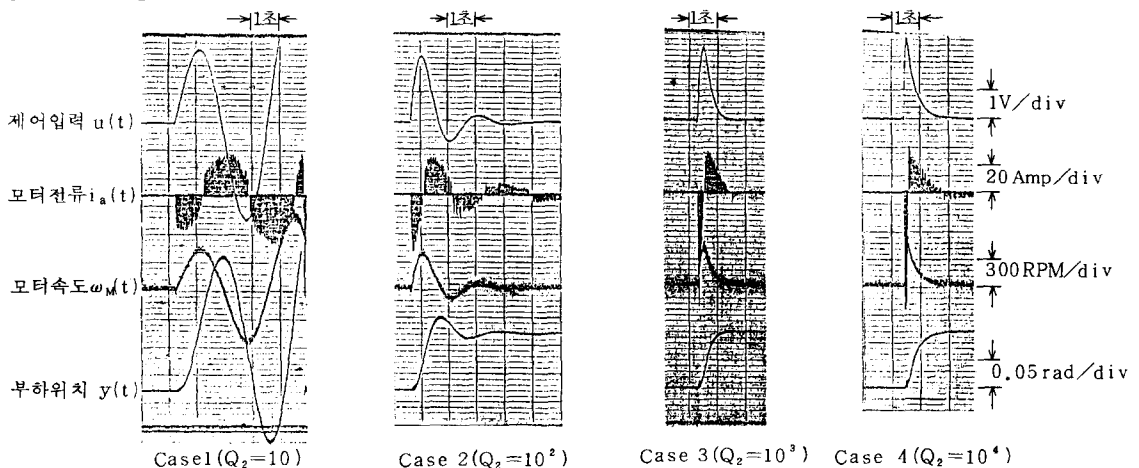


그림 6. 실험 결과

Fig. 6 Experimental results

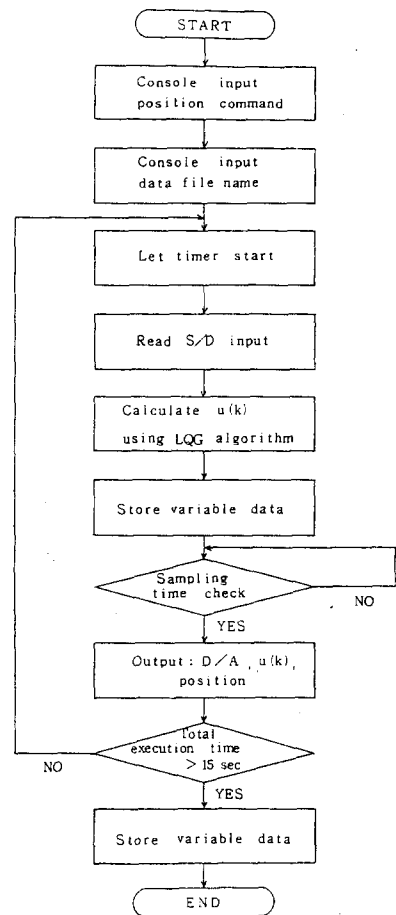


그림 5. LQG 제어기의 흐름도

Fig. 5 Flow chart of LQG controller

표 1에 주어진 모델 데이터와 LQ 조절기의 이득값을 이용하고, 표 2의 Case 1에서 Case 4까지의 변화된 Kalman 필터의 이득으로 실험을 수행하였다. 0.1 rad의 계단입력 (Step input)에 대한 응답결과는 그림 6과 같이 나타났다.

이 결과로부터 잡음분산  $Q_2$  값이  $10^3$  이상으로 증가하면 불안정하던 시스템이 안정화 되면서 정상상태 오차가 0.2mrad 이하로 제어성능이 만족됨을 확인할 수 있다. 따라서 잡음분산 또는 시스템의 모델링 오차등이 포함된  $Q_2$ 를 이론적으로 규명하기는 어렵지만 LQG/LTR 기법에 의한 제어성능을 얻을 수 있도록 loop-shaping 를 수행한 후  $Q_2$ 를 적절히 증가시켜 봄으로써 원하는 제어기 설계가 쉽게 가능해질 수 있음을 본 실험결과를 통해서 검증하였다.

#### IV. 결 론

주로 다변수 시스템에 이용되는 LQG/LTR 방법을 강인한 제어기 설계를 위해서 단일 입·출력 시스템인 서어보메커니즘에 적용하여 보았으며, 양호한 응답특성과 안정성의 개선효과를 얻을 수 있었다. 또한 실제로 피 제어 시스템의 모델링 오차나 잡음특성을 잘 알지 못하더라도 LQG/LTR 방법에 의해서 원하는 제어성능을 얻을 수 있도록 loop-shaping 을 수행한 후 시스템 잡음분산  $Q_2$ 를 적절히 증가시켜 봄으로써 LQG 제어기 설계가 비교적 쉽게 적용될 수 있음을 실험결과를 통해서 나타내 보였으며, 본 논문에서 시도된 방법으로써 연속계 LQG/LTR 에 의해 설계된 결과를 이산계로 등가변환하여 디지털 제어를 구성해본 결과 디지털 LQG 를 직접 구성하는 것 보다 시행착오없이 효과적인 제어기 설계가 가능하였다.

#### V. 참 고 문 헌

1. J.C. Doyle and G. Stein  
"Multivariable Feedback Design: Concepts for a classical/Modern Synthesis" IEEE-AC, Vol.26, No.1, P4~16, Feb. 1981
2. W.A. Wolovich  
"Multipurpose controllers for Multivariable Systems" IEEE-AC, Vol-26, No.1, P162-170, Feb. 1981
3. E.J. Davison  
"The Multivariable Tuning Regulators: the Feedforward and Robust Control of a General servomechanism problem" IEEE-AC, Vol-21, No. 1, P35-47, Feb. 1981
4. H.H. Rosenbrok, Computer-Aided Control System Design, New York : Academic, 1974
5. A.G.J. MacFarlane and B.Kouvaritakis "A design technique for linear multivariable feedback systems", Int. J. Contr. Vol-25, P 837-879, 1977
6. U. Shaked  
"Guaranted Stability Margins for the Discrete-time Linear Quadratic Optimal Regulator" IEEE-AC, Vol-31, No. 2, P 162-165, Feb. 1986
7. P. Dorator and A.H. Levis  
"Optimal Linear Regulators: the discrete-time case" IEEE-AC, Vol-16, No. 6, P613-620, Dec. 1971
8. A. Gelb editor, Applied Optimal Estimation, M.I.T. press, 1974
9. G.F. Franklin and J.D. Powell, Digital Control of dynamic systems, Addison-Wesley Co., 1980
10. Special Issue on the LQG problem, IEEE-AC, Dec. 1971
11. D.C. Yoular, H.A. Jabr, and J.J. Bongiorno  
"Modern Wiener-Hopf design of optimal Controllers-Part II, the multivariable case" IEEE-AC, Vol-21, No.3, P319-338, 1976
12. J.C. Doyle and G. Stein  
"Robustness with observers" IEEE-AC, Vol-24 No. 4, P607-611, Aug. 1979