파라미터가 불확정된 경우의 Guaranteed Cost LQ 레귤레이터

°이 정 문 최 계 근
서 울 대 학 교 전 자 공 학 과

A Guaranteed Cost LQ Regulator in the Presence of Parameter Uncertainties

Jung Moon Lee Keh Kun Choi
Dept. of Elec. Eng. Seoul National Univ.

Abstract

Guaranteed cost control is a method applicable to a class of systems with uncertain parameters that guarantees an upper bound of the cost functional.

This paper is concerned with a matrix decomposition technique used to yield a reasonable upper bound of the cost functional for a finite-time LQ regulator problem. The uncertain linear systems dealt with in this paper are described by a set of state equations of single-input phase-variable canonical form which contain unknown but bounded uncertain parameters.

I. 서론

제어 시스템의 수학적 표현에 있어서는 시스템 파라미터의 불확정성으로 대표되는 시스템의 불확정성이 반드시 수반되는데, 이는 파라미터의 값을 정확히 알 수 없음으로 인해서 생기는 모델링 오차나 주변 환경의 변화로 인해서 생기는 파라미터의 변동등에 기인하는 것이다. 만약 이와 같은 파라미터 불확정성의 범위가 한정되어 있는 경우라면, 가능한 모든 파라미터의 변동에 대해서 시스템의 성능이 보장되는 제어기를 설계하는 것이 바람직할 것이다.

이에 대해서는 여러 각도에서 많은 연구가 진행되어 오고 있는데, 여기에는 폐루우프 시스템의 안정도에 중점을 둔 방식 [1-4], 시스템 성능의 감도(sensitivity)에 중점을 둔 방식 [5, 6], 그리고 주어진 범위 이내의 파라미터 변동에 대해서 평가함수(cost functional)가 어떤 값을 넘지 않도록 하는 guaranteed cost 제어방식 [7] 등이 있다. 이들은 파라미터의 불확정성에 대한 확률적 정보가 주어져야 하는 확률제어방식 [8] 과는 달리 파라미터 값의 범위만 주어지면 적용이 가능하다.

본 논문에서는 파라미터가 불확정된 위상변수 표준형 [9] 의 단일 입력 선형 시스템을 다루었으며, LQ 레귤레이터 문제에 guaranteed cost 제어방식을 적용하는 과정에서 도입된 행렬 분해법 [10] 을 체계화하여 guaranteed cost, 즉 평가함수의 상한(upper bound)이 합리적인 값으로 결정될 수 있도록 하였다.

II. Guaranteed Cost 제어기의 설계

파라미터가 불확정된 시스템은 일반적으로 다음과 같이 표시될 수 있다.

$$\dot{x}(t)=f(x(t),u(t),q(t),t) \quad (1)$$

여기서 $x(t)\in R^n$ 는 상태 벡터, $u(t)\in R^m$ 은 제어 입력이고, $q(t)\in R^r$ 는 영역 Ω에 한정된 불확정 파라미터들의 벡터이다. 평가함수가

$$J=h(x(t_f),t_f)+\int_{t_0}^{t_f} g(x(t),u(t),q(t),t)\,dt \quad (2)$$

로 주어진다면, 다음 정리에 의해서 Ω내의 모든 $q(t)$에 대하여 평가함수 J가 어떤 값 V를 넘지 않도록 제어 입력 $u(t)$를 결정할 수 있다.

정리 1 [10]

어떤 함수 $V(x(t),t)$의 각 변수에 대한 1차 도함수가 연속일 때, 모든 $q(t)\in\Omega$, $x(t)$, $u(t)$ 및 $t\in[t_0,t_f]$에 대해서 다음 부등식을 만족하는 임의의 함수 $F(.)$를 정의한다.

$$F(V(x(t),t),x(t),u(t),t) \geq g(x(t),u(t),q(t),t) + \left[\frac{\partial V(x(t),t)}{\partial x}\right]' f(x(t),u(t),q(t),t) + \frac{\partial V(x(t),t)}{\partial t} \quad (3)$$

이때 함수 $F(.)$를 최소화하는 $u(t)$의 값을 $v(x(t),t)$라 하고, 모든 $x(t)$와 $t\in[t_0,t_f]$에 대해서

$$F(V(x(t),t),x(t),v(x(t),t),t)=0 \quad (4.a)$$

$$V(x(t_f),t_f)=h(x(t_f),t_f) \quad (4.b)$$

이 만족되면 $V(x(t_0),t_0)$는 guaranteed cost가 되고 $v(x(t),t)$는 이에 대응하는 guaranteed cost 제어 입력이 된다.

III. 행렬 분해법을 이용한 guaranteed cost LQ 레귤레이터

본 논문에서는 다음 식으로 표현되는 위상변수 표준형의 단일 입력 선형 불확정 시스템을 다루고자 한다.

$$\dot{x}(t)=[A_0+\sum_{i=1}^{n}A_i q_i(t)]x(t)+bu(t) \quad (5)$$

여기서 행렬 A_i 는 (n, i)위치의 요소가 $a_i \ge 0$이고 나머지 요소는 모두 0인 n*n의 정방행렬로서

$$A_i=d_i e_i' \qquad i=1,2,\ldots,n \quad (6)$$

와 같이 2개의 n차원 벡터로 분해할 수 있으며, 불확정 파라미터 $q_i(t)$는 모든 $t\in[t_0, t_f]$에 대해서

$$|q_i(t)|\le 1 \qquad i=1,2,\ldots,n \quad (7)$$

을 만족한다. 평가함수는

$$J=(1/2)x'(t_f)Hx(t_f)$$
$$+(1/2)\int_{t_0}^{t_f}[x'(t)Qx(t)+ru^2(t)]dt \quad (8)$$

로 주어지며, $H=H'\ge 0$, $Q=Q'\ge 0$, $r>0$이다.

정리 2 [10]

모든 $t\in[t_0, t_f]$에 대해서 $K(t)=K'(t)>0$인 행렬 $K(t)$가 존재하여

$$V(x(t),t)=(1/2)x'(t)K(t)x(t) \quad (9)$$

라고 가정하면 식(3)을 만족하는 함수는

$$F(V(x(t),t),x(t),u(t),t)$$
$$=(1/2)[x'(t)Qx(t)+ru^2(t)]$$
$$+x'(t)K(t)[A_0x(t)+bu(t)]$$
$$+(1/2)[x'(t)K(t)\sum_{i=1}^{n}d_i d_i' K(t)x(t)$$
$$+x'(t)\sum_{i=1}^{n}e_i e_i' x(t)]$$
$$+(1/2)x'(t)\dot{K}(t)x(t) \quad (10)$$

로 정의할 수 있다.

이때 함수 F(.)는 벡터 d_i 및 e_i의 영향을 받으며, 식(3)에서 보는 바와 같이 F(.)의 상한(upper bound)이 최소화되도록 d_i와 e_i를 결정하는 것이 바람직함을 알 수 있다. i번째 요소가 1이고 나머지 요소는 모두 0인 n차원 벡터를 p_i라 할 때, d_i와 e_i를 각각

$$d_i=d_i(t)=\frac{\sqrt{a_i}}{s(t)}p_n=\frac{\sqrt{a_i}}{s(t)}b \quad (11.a)$$

$$e_i=e_i(t)=s(t)\sqrt{a_i}\,p_i \quad (11.b)$$

로 놓고, 이들의 영향을 받는 F(.)의 항 만을 고려하면

$$x'(t)K(t)\sum_{i=1}^{n}d_i(t)d_i'(t)K(t)x(t)$$
$$+x'(t)\sum_{i=1}^{n}e_i(t)e_i'(t)x(t)$$
$$=\frac{1}{s^2(t)}\sum_{i=1}^{n}a_i x'(t)K(t)bb'K(t)x(t)$$
$$+s^2(t)\sum_{i=1}^{n}x'(t)a_i p_i p_i' x(t)$$
$$=\frac{1}{s^2(t)}\sum_{i=1}^{n}a_i[b'K(t)x(t)]^2$$
$$+s^2(t)\sum_{i=1}^{n}[\sqrt{a_i}\,p_i'x(t)]^2$$
$$\le[\frac{1}{s^2(t)}\sum_{i=1}^{n}a_i\|b'K(t)\|^2$$
$$+s^2(t)\sum_{i=1}^{n}\|\sqrt{a_i}\,p_i'\|^2]\|x(t)\|^2$$
$$=[\frac{1}{s^2(t)}\|b'K(t)\|^2+s^2(t)]\sum_{i=1}^{n}a_i\|x(t)\|^2 \quad (12)$$

이 되므로 식(10)으로 주어지는 F(.)의 상한이 최소화되기 위해서는

$$s^2(t)=\|b'K(t)\| \quad (13)$$

이어야 한다.

식(11.a), (11.b), (13)을 식(10)에 대입하고 정리 1에 의하여 F(.)를 최소화하는 u(t)를 구하면

$$u(t)=v(x(t),t)=-(1/r)b'K(t)x(t) \quad (14)$$

이고 이를 다시 식(10)에 대입하면 식(4.a), (4.b)에 의해서 행렬 K(t)는 Riccati 미분 방정식

$$-\dot{K}(t)=K(t)A_0+A_0'K(t)+Q+s^2(t)\sum_{i=1}^{n}a_i p_i p_i'$$
$$-[(1/r)-\frac{1}{s^2(t)}\sum_{i=1}^{n}a_i]K(t)bb'K(t) \quad (15.a)$$

$$K(t_f)=H \quad (15.b)$$

을 만족하는 해가 된다. 이때 식(14)로 주어지는 guaranteed cost 제어 입력에 대해서 guaranteed cost는 $(1/2)x'(t_0)K(t_0)x(t_0)$가 된다.

IV. 예제

제시된 설계 방식을 적용하는 다음과 같은 예제를 생각해 보자. 식(5), (8)에서

$$A_0=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\quad A_3=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1.6\end{bmatrix}\quad b=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$Q=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\quad r=1$$

로 주어진다면 $t_f \to \infty$일 때 식(15. a)의 Riccati 방정식의 정상해(stationary solution)는

$$K=\begin{bmatrix}2.83&4&1.17\\4&10.2&3.32\\1.17&3.32&4.69\end{bmatrix}$$

이 된다. 이 경우 식(14)의 guaranteed cost 제어방식을 적용하면 폐루우프 시스템은 불확정 파라미터 $q(t)$의 어떠한 변화에 대해서도 항상 점근적으로 안정(asymptotically stable)하며 초기 상태가

$$x(t_0)=[1\ 1\ 1]'$$

이라면 guaranteed cost는 17.35가 된다. 실제로 평가함수의 최대치는 $q=1$일 때 13.2가 되므로 guaranteed cost가 적절한 수준의 값을 갖는다는 것을 확인할 수 있다.

V. 결론

본 논문에서는 함수 F(.)의 상한이 최소화되도록 하는 행렬 분해법을 사용하여 시변(time-varying) 계수를 갖는 Riccati 미분 방정식을 유도하였고, 그 해를 구함으로써 guaranteed cost가 적절한 값이 되도록 LQ 레귤레이터를 설계하였다. 이는 이전에 제시된 행렬 분해법 [10]을 체계화한 것으로서, 불확정 파라미터를 포함하는 행렬을 정규 직교 변환(orthonormal transformation)하는 방식 [7]에 비해서 간단하면서도 그와 동일한 결과를 나타낸다.

한편 예제에서 보는 바와 같이 일반적으로 $t_f \to \infty$일 때에는 Riccati 방정식의 정상해가 존재할 것으로 추측되나 이에 대해서는 안정도 문제와 함께 현재 연구가 진행 중에 있다.

참고문헌

[1] J. S. Thorp and B. R. Barmish, "On guaranteed stability of uncertain linear systems via linear control," J. Optimiz. Theory Appl., vol. 35, no. 4, pp. 559-579, Dec. 1981.

[2] J. L. Willems and J. C. Willems, "Robust stabilization of uncertain systems," SIAM J. Contr. Optimiz., vol. 21, no. 3, pp. 352-374, May 1983.

[3] W. E. Schmitendorf and B. R. Barmish, "Guaranteed asymptotic stability for systems with constant disturbances," in Proc. 1985 Amer. Contr. Conf., Boston, MA, pp. 778-781.

[4] M. Eslami and D. L. Russell, "On stability with large parameter variations: stemming from the direct method of Lyapunov," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-25, no. 6, pp. 1231-1234, Dec. 1980.

[5] P. V. Kokotović, J. B. Cruz, Jr., J. E. Heller, and P. Sannuti, "Synthesis of optimally sensitive systems," Proc. IEEE, vol. 56, pp. 1318-1324, Aug. 1968.

[6] M. Sobral, Jr., "Sensitivity in optimal control systems," Proc. IEEE, vol. 56, pp. 1644-1652, Oct. 1968.

[7] S. S. L. Chang and T. K. C. Peng, "Adaptive guaranteed cost control of systems with uncertain parameters," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-17, no. 4, pp. 474-483, Aug. 1972.

[8] M. Mariton and P. Bertrand, "Robust jump linear quadratic control: a mode stabilizing solution," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-30, no. 11, pp. 1145-1147, Nov. 1985.

[9] B. C. Kuo, Automatic Control Systems, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., pp. 109-115, 1975.

[10] J. M. Lee and K. K. Choi, "Design of a guaranteed cost controller for a class of systems with uncertain parameters," J. KIEE, vol. 23, no. 5, Sep. 1986.