Robust 제어기에 관한 연구동향

권 욱 현 °김 상 우
서울대학교 공과대학 제어계측공학과

A Survey on the Robust Controller

Wook-Hyun Kwon Sang-Woo Kim
Dept. of Control and Instrumentation, Seoul National University

요 약

본 논문에서는 과거 10여년 동안의 Robust 제어기에 관한 연구동향을 조사 요약하였다. Robust 제어기에 관한 연구는 제어시스템의 Robustness 분석과 Robust 한 제어기 설계 방법으로 나뉘며 Robustness 분석은 불확실성이 구조를 갖는 경우와 구조가 엇는 경우로 나뉘어 연구된다. Robust한 제어기 설계 방법에는 LQG/LTR 방법과 제어기 매개변수화등이 있다. 본 논문에서는 각 방법들을 간략히 소개하고 이들을 비교하였다.

1. 서론

수학적 모델들은 언제나 실제 시스템에 대한 불완전한 묘사이며 어떠한 경우이던간에 그와같은 묘사에 포함된 매개변수 (Parameter)들은 종종 변하기 쉽고 불확실하다. 이러한 현상들은 수학적 모델을 이용하여 제어 시스템을 설계 및 분석할 때는 피할 수 없는 일이다. 그러므로 시스템을 분석하는 단계에서는 매개변수들의 변화에 따른 시스템 성질들의 민감도 (Sensitivity)를 평가하는 것이 중요하고, 설계하는 단계에서는 이러한 민감도를 최소화하고 Robust한 제어구조를 목적으로 하는 것이 바람직하다. Robustness의 중요성은 여러학술회의와 문헌 [1,2]을 통해서 강조되었고 현재 가장 활발히 연구되고 있는 주제중의 하나이다. [3]

시스템의 Robustness를 향상시키기 위해서는 주로 궤환제어 구조 (Feedback Control Scheme)을 사용하는데 [4], 이에는 주파수 영역에서의 설계와 시간영역에서의 설계의 두가지 접근방식이 있다. 고전적인 주파수 영역에서의 설계는 Bode-Nyquist 이론에 근거를 두고 있어 불확실성에 대하여 Robust하라는 요구조건을 쉽게 만족시킬 수 있으나 단일입출력 (SISO) 시스템에만 적용되며 다변수 시스템으로의 확장이 어렵고 확장된 방법도 Robustness를 측정하는데는 부적당하다 [5]. 시간영역에서의 설계 방법은 최적제어, 확률제어등의 현대제어 이론을 이용하여 다변수 시스템을 쉽게 다룰 수 있으나 시스템의 Robustness와 최적을 위한 개념사이의 명확한 관계를 규정짓기가 힘들다는 단점을 갖고 있다. 지난 10여년 동안의 궤환제어에 관한 연구는 주로 이러한 서로의 단점을 어떻게 해결할 것인가에 집중되었으며 많은 성과를 거두었다 [1-3].

제어시스템의 Robustness 분석은 대부분 일반화된 다변수 Nyquist 이론 [6-9]에 근거해서 도출된 새로운 판단법을 이용한다. Robustness를 분석하기 위해서는 시스템의 불확실성을 가정해야 하는데 행렬의 특이치 (Singular Value)와 M-행렬 [11-14]을 주로 이용한다. 불확실성의 구조가 가정되지 않았을 경우 (Unstructured Uncertainty) Robustness 분석은 특정행렬의 특정 norm (l_1, l_2 , l_∞ norm 등)이 갖는 영역의 한계를 측정하거나 [4,5,10,11] 고유치가 갖는 영역의 궤적을 이용하여 수행된다 [16,17]. 이러한 영역의 한계는 대부분의 경우 지나치게 Conservative 하며 [18] 이를 줄이기 위한 연구가 많이 진행되어 왔다. [12-15, 18-21]

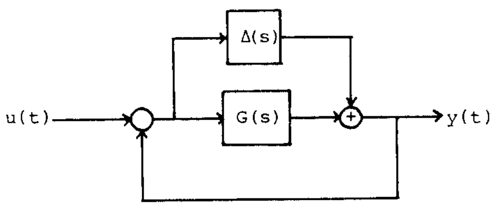
Robust 제어기의 설계 방법은 매우 다양하나 크게 두가지로 나눌 수 있다. 첫째는 시간영역에서의 설계 방법인 최적제어 설계 방법에서 설계 변수를 조정하여 원하는 Robustness를 얻거나 [4,22-25] 모델자체에 불확실성을 내포시켜 다시 최적화를 수행하는 방법 [26-28] 등이 있다. 두번째는 주파수영역에서의 설계 방법으로 행렬 전달함수를 이용하여 제어기를 매개변수화 (Parameterization) 하여 Robustness를 만족하도록 제어기를 선택하는 것이다 [29-33]. 이러한 방법들은 특정한 Ring 상에서 행렬전달함수의 소인수 분해 [34] [34] 이론에 근거를 두고 있다. 그 외에도 그라프위상 (Graph Topologer) [35]과 매개변수공간 (Parameter Space) [36] 에서의 설계 방법 및 비선형 프로그램밍을 이용한 robust servomechanism을 설계하는 방법등이 있다 [37,38].

본 논문에서는 Robustness의 분석 및 robust 제어기 설계 방법에 대한 연구를 정리하였다. 2절에서는 Robustness 측도 (measure)와 이를 이용한 분석 방법에 대해서, 3절에서는 LQG형 제어시스템의 robustness

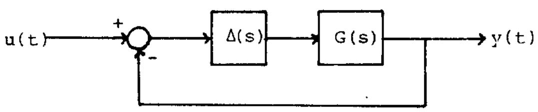
분석에 대하여 기술하였다. 4절에서는 Robust 제어기 설계 방법을 기술하였고 5장에서 결론을 내렸다.

2. 제어시스템의 Robustness 분석

개루우프 (Open Loop) 제어시스템보다 궤환제어 시스템이 Robustness가 좋다는 것은 주지의 사실이다. [4] 그러므로 Robust 제어에 관한 연구는 모두 궤환제어시스템에서 이루어진다. 제어시스템에서 불확실성의 표현은 그림1과 같이 더하기형과 곱하기형이 있다. 그 외에도 여러가지 방법이 있으나 해석방법이나 결과는 비슷하다. [14],[39]



a) 더하기형 불확실성



b) 곱하기형 불확실성

그림1. 궤환제어시스템의 불확실성의 형태

여기서 $G(s)$는 플랜트 모델과 제어기를 합한 루우프 전달 행렬 (Transfer Matrix)이고 $\Delta(s)$는 플랜트의 불확실성을 나타낸다. 제어시스템의 Robustness 분석은 주로 제어 시스템이 안정도를 유지하면서 견딜 수 있는 $\Delta(s)$의 범위를 구하는 것이다. MIMO 시스템인 경우 다변수 Nyquist 이론을 이용하여 안정도를 판단할 수 는 있으나 허용되는 $\Delta(s)$를 추정 할 수 는 없다. [5] 다변수 시스템에 대한 Robustness 분석은 Safonov [40]에 의하여 처음 시작되었는데 그는 $\Delta(s)$를 sector형의 비선형으로 가정하여 LQ 조절기의 Robustness를 분석하였다. 그 후 다변수 Nyquist 이론의 일반화에 대한 연구와 [6-9] 특이치 분해 (Singular Value Decomposition)에 대한 연구에 [41] 힘입어 더욱 일반적인 결과가 나왔다. [4,5,10] 이들 이론의 기본이 되는 생각은 모델시스템 (Nominal System)의 Nyquist 궤적이 실제시스템 (Perturbed System)의 것으로 연속적으로 변형되어 가면서 임계점 (Critical point, 0 또는 $-1+j0$)을 에워싸는 횟수가 변화되지 않으면 안정도가 유지된다는 것이다. 여기서 도출된 가장 중요한 식은 다음과 같다. [5]

$$\det\ (\ I+(1-\varepsilon)G(s)+\tilde{G}(s))\neq 0 \qquad s\ \varepsilon\ D_R,\quad 0\leq\varepsilon\leq 1 \tag{2.1}$$

윗식에서 $\tilde{G}(s)\stackrel{\Delta}{=}G(s)\Delta(s)$ 또는 $G(s)+\Delta(s)$ 이며 D_R은 Nyquist contour를 나타낸다. 식(2.1)에서 $\varepsilon=1$로 하면 다음식이 된다.

$$\det\ (\ I+\tilde{G}(s)\ )\neq 0 \tag{2.2}$$

다음과 같이 M을 정의하면 (2.2)가 만족하는 필요충분조건은 식(2.4)와 같다.

$$M(s)=\begin{cases}(I+G(s))^{-1} & (\text{ 더하기형 } \Delta(s)\ )\\ (I+G^{-1}(s))^{-1} & (\text{ 곱하기형 } \Delta(s)\ )\end{cases} \tag{2.3}$$

$$\rho(M\Delta)<1 \tag{2.4}$$

위식에서 $\rho(\cdot)$는 고유값의 절대값 $|\lambda(\cdot)|$의 최대값을 나타낸다.

그러나 $\rho(M)$과 $\rho(\Delta)$를 알고 있어도 특수한 경우가 아니면 $\rho(M\Delta)$를 말하기가 어렵다. [21] 또한 $\rho(\cdot)$은 모든 행렬 norm의 하한이므로 다음 (2.5)식을 이용하여 $\rho(M\Delta)$의 상한을 구한다.

$$\rho(M\Delta)\leq ||M\Delta||\leq ||M||.||\Delta||<1 \tag{2.5}$$

일반적으로 $\Delta(s)$는 구조에 대해서는 정보가 없고 (unstructured) 단지 $\bar{\sigma}(\Delta(s))\leq l(s)\quad s\ \varepsilon\ D_R$ 라고 가정되는데 이러한 경우 (2.5)식으로부터 시스템이 안정할 필요충분조건을 얻을 수 있다 [4,5,10].

$$\bar{\sigma}(M(s))\leq\frac{1}{l(s)}\qquad s\ \varepsilon\ D_R \tag{2.6}$$

위식에서 $\bar{\sigma}(\cdot)$는 최대특이치 (maximum singularvalue)를 나타낸다. 이 특이치를 이용한 방법이 가장 널리 사용되는 방법이다. 이 방법의 장점은 특이치의 크기와 안정도 사이의 관계를 쉽게 알 수 있고, 특정형태의 교란을 받았을때 시스템이 안정하다는 보장을 제공할 수 있고 또한 쉽게 계산될 수 있다는 점이다. 그러나 이방법은 $\Delta(s)$가 어떤 특정한 구조를 갖고 있을때는 그 판단이 매우 Conservative 하고 루우프의 여러곳에서 동시에 발생하는 교란을 처리하기가 힘들고 교란이 발생하는 곳에서 루우프를 절단하여 루우프 전달함수를 구해야 하는 단점을 갖고 있다. [18] 이러한 단점을 극복하기 위하여 Safonov는 [12,20] $\Delta(s)$의 구조를 대각선 행렬로 가정했고 Doyle은 [19] $\Delta(s)$를 블록대각선 행렬로 가정했다. 루우프의 여러곳에서 동시에 교란이 발생할 경우 약간의 조작을 통하여 블록대각선 형태로 만들 수 있으며, $\Delta(s)$의 구조를 가정할 경우도 쉽게 블록대각선 행렬로 바꿀 수 있다. 즉 $\Delta(s)=E_1\ \Delta'(s)\ E_2$로 할 수 있으며 $\Delta'(s)$는 블록대각선 행렬이고 $\Delta'(s)$의 각 블록은 $\bar{\sigma}(\Delta_i'(s))\leq\delta$로 표시된다. 이들은 $\rho(M\Delta)$의 보다 정확한 상한을 얻기 위하여 유사스케일링 (Similarity Scaling)을 도입한다.

$$\rho(M\Delta)=\rho(E_2ME_1\Delta')\leq\inf_D\{\bar{\sigma}(DE_2ME_1D^{-1})\}\delta \tag{2.7}$$

여기서 D는 대각선 행렬이고 Δ'의 구조에 따라 결정된다. Doyle은 [19] $\mu(\cdot)$ 함수를 $\mu(M)\leq\inf_D\{\bar{\sigma}(DE_2ME_1D^{-1})\}$

로 정의하고 $\Delta(s)$가 세개이하의 블록을 가질때 실제적으로 상한을 구할 수 있음을 보였다. Safonov [12]의 경우는 $\sigma(\cdot)$ 대신 일반행렬 norm을 사용했고 Perron고유치와 Perron고유벡터를 이용하여 l_{-1} norm과 $l_{-\infty}$norm인 경우 최적치를 구했고 1985년 [20]에 $l_{-\infty}$ norm에 대해서 새로운 해를 제시했다. 이러한 방법들을 이용하면 (2.6)식은 이용한 것보다 확실히 향상된 상한을 구할 수 있으나 필요충분조건은 아니다.[21] 두번째로 가정할 수 있는 $\Delta(s)$의 구조는 $|\Delta_{ij}(s)|$의 상한을 안다고 가정하는 것이다. 즉 $\Delta(s) \in D_s \triangleq \{\Delta : \Delta^+ \leq P, P \in R_+^{mxm}\}$이 된다. 여기서 Δ^+는 Δ의 각 값에 절대치를 취한 것이고 R_+는 음이 아닌 실수의 집합이다.
이럴경우 M-행렬이론과 Perron-Frobenius 정리를 [42] 사용할 수 있다. 즉

$$\rho(M\Delta) \leq \rho[(M\Delta)^+] \leq \rho[M^+\Delta^+] \leq \rho(M^+P) \qquad (2.8)$$

이러한 결과를 처음 이용한 사람은 Kantor와 Andres [13] 이다. $B \in R_+^{mxm}$이고 $I-B \in R_+^{mxm}$인 행렬로 가정하면 $\Delta^+ \leq (M^+)^{-1} B = P$인 에 대하여 시스템은 안정을 유지한다는 결론을 내린다. Owens 와 Chotai[44]도 비슷한 방식으로 $\Delta(s)$의 범위를 얻었다. 위식에서 $\rho(M^+P)$는 계산이 편리하고 (2.6)식보다는 덜 Conservative 하나 M대신 M^+를 도입함으로써 Conservatism이 생긴다. Yeh [14]는 $\Delta(s) \in D_s$로 가정하여 l_{-1}과 $l_{-\infty}$ norm에 대하여 Safanov [12]과 비슷한 결과를 얻었으나 좀더 일반적인 경우를 취급하였다. Kovarithakis와 Latchmann [15,21]은 $\Delta(s) \in D_s$로 가정하고 비유사스케일링 (non-similarity scaling)을 이용하여 $\rho(M\Delta)$의 최적상한을 구하였다. L 과 R을 양의 대각선 행렬이라 하면

$$\rho(M\Delta) = \rho(R^{-1}M L^{-1}L \Delta R) < 1. \qquad (2.9)$$

이 성립하고 특이치를 이용하면

$$\rho(M\Delta) \leq \bar{\sigma}(R^{-1}M L^{-1}L\Delta R) \leq \bar{\sigma}(R^{-1}M L^{-1}) \bar{\sigma}(L \Delta R) \qquad (2.10)$$

이 된다.

$\Delta \leq \Delta^+ \leq P$ 이므로

$$\rho(M\Delta) \leq \bar{\sigma}(R^{-1}ML^{-1}) \bar{\sigma}(LPR) \leq \bar{\sigma}(LPR)/\underline{\sigma}(LM^{-1}R) \qquad (2.11)$$

이 된다.
위식에서 L과 R은 $\rho(M\Delta)$의 상한을 최소화 하도록 결정되어야 하는데 준최적 (Suboptimal) 해는 Perron고유치와 고유벡터를 이용하여, 최적해는 미분방정식으로 표시되어 수치해석적으로 구한다.
$x = (x_1, \ldots, x_m)^T$ 과 $y = (y_1, \ldots, y_m)^T$는 PM^+의 좌우 Perron고유벡터이고 $u = (u_1, \ldots, u_m)^T$와 $v = (v_1, \ldots, v_m)^T$를 M^+P의 좌우 Perron고유벡터라 하면 준최적해는 $L_* = \mathrm{diag}\{\sqrt{x_i/y_i},\ i = 1, \ldots, m\}$, $R_* = \mathrm{diag}\{\sqrt{v_i/u_i},\ i= ,\ldots, m\}$가 되고 이때의 상한의 Perron 고유치로 표시된다. 즉 $\rho(M\Delta) \leq \rho(M\ P)$가 되어 Safonov [11]의 결과와 동일하다.
최적해는 $L = \mathrm{diag}(l_1, \ldots, l_m)$, $R = \mathrm{diag}(r_1, \ldots, r_m)$, $x = (l_1, \ldots, l_m, r_1, \ldots, r_m)$ 이라하면 다음의 미분방정식으로 표시된다.

$$\frac{\underline{\sigma}(LM^{-1}R)(\frac{d}{dx})\{\bar{\sigma}(LPR)\} - \bar{\sigma}(LPR)(\frac{d}{dx})\{\underline{\sigma}(LM^{-1}R)\}}{\underline{\sigma}\{(LM^{-1}R)\}^2} = 0 \qquad (2.12)$$

이식에서 구한 최적해는 L_o, R_o라 하면 $\Delta(s) \in D_s$에 대하여 시스템이 안정할 필요충분조건은 $\bar{\sigma}(L_o(s)P(s)R_o(s))/\underline{\sigma}(L_o(s)M^{-1}(s)R_o(s)) < 1 \quad s \in D_R$ 이 된다.
이러한 방법이외에도 고유치궤적 (Characteristic Loci)을 이용한 방법 [16,17]이 있는데 이는 교란된 시스템의 고유치가 그리는 궤적의 영역을 복소수 평면에 나타내어 임계점을 감싸는 횟수와 임계점과의 거리등을 판단하는 Nyquist 기준과 비슷한 개념을 이용한다.
$\Delta(s) \in D_s$인 경우 각 방법의 비교는 Kovaritakis와 Latchmann 의 논문[21]을 참조하기 바란다. 위에서 구한 최적해 (2.7, 2.12)에서 문제가 되는 것은 실제로 이 식들을 풀어서 최적해를 구할 수 있느냐에 있다. 이것은 일반적으로 매우 어렵고 제한된 경우에만 풀린다.[45]

3. LQG형 제어시스템의 Robustness 분석

단일입출력인 경우 LQ 제어기의 Robustness는 Kalman 부등식 [46] 의하여 쉽게 규정된다. 루우프 전달함수를 $g(s)$라 하면

$$|1 + g(j\omega)| \geq 1 \qquad \forall\omega \qquad (3.1)$$

이 성립한다. 이식으로부터 SISO LQ 제어기는 $[\frac{1}{2}, \infty]$의 이득여유와 $\pm 60^\circ$ 이상의 위상여유를 갖는다. 이 부등식을 Anderson 과 Moore가 다변수의 경우로 확장했고 [47] Safonov [40]가 $\Delta(s)$를 sector형의 비선형으로 가정하여 R이 대각선 행렬인 경우 SISO 경우와 같은 안정도 여유를 갖음을 보였다. Lehtomaki et al. [5]는 Anderson의 부등식을 이용하여 R이 대각선 행렬인 경우 같은 결과를 보였다. 이렇듯 LQ 조절기는 약간의 가정을 통하여 좋은 안정도 여유를 보장할 수 있으나 LQG 제어기의 경우는 일반적으로 그렇지 못하다.[48] Luenberger 관측기도 고주파 불확실성에 대하여 매우 불안함이 보여졌다[49]. 이것의 근본적인 이유는 관측기에 모델의 불확실성을 반영할 수 없기 때문이다.[5] LQ 제어기의 경우도 주파수 영역에서는 매우 큰 안정도 여유를 갖고 있으나 이것이 시간영역으로 바뀌었을때 그 크기가 어떻게 될지는 알 수 없다. Soroka [26,50]는 {A,B,C} 에서 약간의 변화만 일어나도 LQ 제어시스템이 불안정해질 수 있음을 보였다.

4. Robust 제어기의 설계

Robust 제어기 설계에 대한 연구는 크게 두가지로 나뉘어진다. 첫째는 다항식 행렬을 이용하여 시스템을 안정화시킬 수 있는 모든 종류의 제어기를 매개변수화 하는 것이고 다른 하나는 기존의 LQG형 제어기 설계 방법을 Robustness를 향상시킬 수 있도록 설계 방법을 수정하는 것이다.

첫번째 방법은 Yular et al. [29]가 시작했다. 다항식 행렬과 전달함수를 이용한 Yular 원래의 매개변수화 (Parameterization)은 여러가지 방법으로 재구성 되었다. Antsaklis는 [30] 단지 다항식 행렬만 갖고 내부성질을 더 잘 알 수 있도록 매개변수화 했다. 그러나 위의 두가지 매개변수화는 모두 제어기가 실현 가능하다는 것을 보장하지 못한다.[3] 반면에 Desoer [31]의 인수분해 표시법과 (Fractional Representation) Zames [32,33]의 모델참조형 (Model reference form)은 제어기의 실현성 (Properness)을 보장한다. 그러나 숨겨진 모드 (Hidden Mode)를 갖는 어려움이 있다. 인수분해표시법은 실계수를 갖는 진유리 (Proper Rational) 함수의 집합 R(s)의 모든 안정한 요소들의 부분집합 $\psi(s)$ 상에서의 소인수분해 (Coprime factorization) 개념에 근거를 둔다.[34] 그림2에서 $[e_1, e_2]^T/[u_1,u_2]^T = H$ 는 다음과 같다.

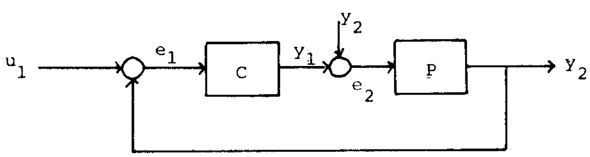


그림2. 다변수 궤환 제어시스템

$$H = \begin{bmatrix} (I + PC)^{-1} & -P(I + CP)^{-1} \\ C(I + PC)^{-1} & (I + CP)^{-1} \end{bmatrix} \qquad (4.1)$$

여기서 $C \in M(\psi)$이고 $P \in M(R)$ 이다. $M(\psi)$와 $M(R)$은 그 원소가 각각 $\psi(s)$와 $R(s)$에 속하는 행렬들의 집합이다. $N, D \in M(\psi)$에 대하여 $P = ND^{-1}$이고 $XN+YD = I$인 $X, Y \in M(\psi)$가 존재하면 (N,D)는 P의 우측 소인수분해 (right coprime factorization)라하고 좌측 소인수분해 $P = \tilde{D}^{-1}\tilde{N}$도 비슷하게 정의한다. 그러면 제어기는 다음과 같이 매개변수화된다.

$$C = (Y - R\tilde{N})^{-1} (X + R\tilde{D}),$$
$$\det(Y - R\tilde{N}) \neq 0 \qquad (4.2)$$

$$C = (\tilde{X} + DR) (\tilde{Y} - NR)^{-1},$$
$$\det(\tilde{Y} - NR) \neq 0 \qquad (4.3)$$

이고 $M(\psi)$ 상에 있는 모든 R에 대하여 C는 H를 안정화시킨다. 또한 P가 strictly proper 하면 위두식의 역행렬이 모두 존재한다.

위식에서 R(s)를 Robustness를 향상시키는 방향으로 선택하는 것이 문제이다. Zames [31]에 의하여 도입된 매개변수화에서 제어기는

$$C = Q (I - PQ)^{-1} \qquad (4.4)$$

로 표시되며 Q가 설계 변수이다. P가 안정하고 Strictly proper한 경우 (4.4)식은 $Q \in M(\psi)$에 대하여 식 (4.1)을 안정화시킨다.

Zames [32,33]는 Q를 선택함에 있어서 민감도 함수의 W-가중치 H_∞ norm을 최소화 시키도록 선택했다. 즉 $\mu(p) = \inf_Q \| W(I-PQ)^{-1} \|_\infty$를 만족하도록 선택했다. Safonov와 Chen [51]은 설계 변수 Q를 점근적 추종 (Asymptotic Tracking)과 decoupling을 만족하도록 하는 최적설계에서 가중치 안정도 여유 특이치를 최대로 하도록 선택하는 방법을 제시했다. 또한 Grimble [52]은 H_∞ 최적제어 문제의 해가 표준 LQG의 해에서 얻을수 있음을 보이고 이들의 관계를 규명하였다.

그외에도 Vidyasagar [33,53,54]는 그래프 위상 (Graph Topology)과 그래프메트릭 (Graph Matric)을 이용하여 Robust 제어기를 설계하는 방법을 제시했고 Kimura [55]는 특정영역의 불확실성에 견딜 수 있는 제어기를 Nivanlinna-Pick 방법을 이용하여 구성하였고, Swierniak [56]는 고정점 (Fixed Point) 이론을 이용하여 제어기를 설계했으며 Davison [37,38] 은 robust servomechanism을 비선형 계획법 (nonlinear programming)을 이용하여 설계했다. 또한 Ackermann [36]과 Zeheb 와 Hertz [57]는 시스템의 고유치를 특정영역에 위치시키는 제어기의 변수 공간을 정의하여 robust한 안정도를 얻는 방법을 제시했다.

두번째 방법은 기존의 LQG형 제어기 설계 방법을 이용한 것이다. LQSF (Linear Quadratic State Feedback) 제어기의 안정도 여유는 크지만 LQG 제어기의 안정도 여유는 일반적으로 보장되지 않는다.[48] Doyle 과 Stein [23]은 LQG의 안정도 여유가 점근적으로 LQSF의 안정도 여유와 같아지는 조건을 구하고 (식4.5), 식 (4.6)에서 $q \to \infty$인 경우 이 조건이 만족됨을 보였다. 이러한 방법을 루우프 전달 회복 (Loop Transfer Recovery)이라 한다.

$$K(I + C(SI-A)^{-1} K)^{-1} = B(C(SI-A)^{-1} B)^{-1} \qquad (4.5)$$

$$Q( ) = Q_o + q B V B^T$$
$$R_o = R_o \qquad (4.6)$$

여기서 {A,B,C}는 시스템 행렬이고 K는 LQ 조절기의 이득이고 Q_o와 R_o는 상태잡음과 측정잡음의 분산이고 V 정칙 (positive definite) 대칭행렬이다. 1981년 Doyle 과 Stein [4] 은 그림2의 PC의 최대최소특이치를 이용하여 SISO 시스템의 루우프 shaping 방법을 MIMO로 확장하였다. 즉 Robustness와 성능을 모두 만족시키기 위한 $\bar{\sigma}(pc)$와 $\underline{\sigma}(pc)$의 모양을 정하고 이에 맞도록 제어기를 설계하는 개념이다. 이 개념을 이용하여 Kapasouris et al [25]는 LTR 방법을 이용한 체계적인 설계 방법을

제시한다. 설계 과정은 첫째 설계사양에 맞추어 $\bar{\sigma}(\cdot)$과 $\underline{\sigma}(\cdot)$의 모양을 결정하고 Kalman Filter를 설계하여 특이치의 모양을 검사한다. 둘째는 원하는 모양과 맞지 않으면 추가 시스템을 붙여 모양이 비슷하도록 한다. 세째는 상태가중치와 제어량가중치를 조절하여 LTR 설계를 한다. Doyle과 Stein [23]에 의하여 제시된 LTR 방법은 최소위상시스템이면서 입력과 출력의 수가 같아야 한다는 제약이 있다. 이들중 입력수와 출력수가 같아야 한다는 제약은 Madiwale과 Willians [22]에 의하여 해결되었다. 또한 단측자 (observer)의 고유구조 (Engenstructure) 배치를 이용하여 LTR 조건을 성취하는 방법도 있다.[58] LQG/LTR 방법외에도 상태방정식에 적당한 불확실성을 미리 가정한 후 다시 최적화를 수행하는 방법 [27,28]과 Riccati 방정식을 변형하여 안정도 여유를 개선하는 방법등이 있다.

5. 결론

이제까지 우리는 제어시스템의 Robustness 해석방법과 Robust 제어기 설계방법에 대한 연구가 어떻게 진행되어 왔나를 살펴보았다. 이일들은 지난 10여년동안 활발히 진행되어온 연구들의 주류를 이루는 것들이다. 시스템의 robustness를 해석하는 방법은 주로 안정도에 관한 것이고 외란제어 및 추종성에 대한 robustness의 연구는 소수에 지나지 않는다.[62~63] Robust 제어기 설계는 아직 정착된 방법이 몇개않되고 대부분 불확실성을 구조가 없는 특이치 한계를 갖는 경우만 수행되었다. 앞으로 구조를 갖는 불확실성을 가정한 좀더 현실적인 제어기 구성방법이 많이 연구되어야 겠고 robustness 해석면에 있어서는 한계 계산문제가 연구되어야 할 것이다.

6. 참고문헌

1. Special Issue on Linear Multivariable Control Systems, IEEE T-AC,Vol. AC-26,No.1,Feb. 1981
2. Special Issue on Sensitivity and Robustness, IEE Proc.-D, Vol.129,Part D,No.6,Nov.1982
3. P.V.Kokotovic,"Recent Trends in Feedback Design : An Overview",Automatica,Vol.21,No.3,1986
4. J.C.Doyle and G.Stein,"Multivariable Feedback Design : Concepts for a Classical/Modern Synthesis",IEEE T-AC,Vol.AC-26 ,No.1,Feb. 1981
5. N.A.Lehtomaki,N.R.Sandell and M.Athans,"Robustness Results in Linear Quadratic Gaussian Based Multivariable Control Design",IEEE T-AC,Vol. AC-26,NO.1,Feb. 1981
6. H.H.Rosenbrock,Computer-Aided Control System Design, Academic Press,1974
7. A.G.J.McFarlane and I.Postlethwaite,"The Generalized Nyquist Stability Criterion and Multivariable Root Loci",Int.J.Control,Vol.25,1977
8. C.A.Desoer and Y.T.Wang,"On the Generalized Nyquist Stability Criterion",IEEE T-AC,Vol.AC-25,NO.2,Apr. 1980,pp187-196
9. M.G.Safonov and M.Athans,"A Multiloop Generalization of the Circle Criterion for Stability Margin Analysis",IEEE T-AC, Vol.AC-26,No.2,Apr.1981
10. M.J.Chen and C.A.Desoer,"Necessary and Sufficient Condition for Robust Stability of Linear Distributed Feedback System" ,Int.J.Control,1982,Vol.35,No.2
11. M.G.Safonov,A.J.Laub,and G.L.Hartmann,"Feedback Properties of Multivariable Systems: the Role and Use of the Return Difference Matrix",IEEE T-AC,Vol.AC-26,No.1,Feb. 1981
12. M.G.Safonov,"Stability Margins of Diagonally Perturbed Multivariable Feedback Systems",IEE Proc.-D,Vol.129,Part D, No.6,Nov.1982
13. J.C.Kanto and R.P.Andres,"Characterization of 'Allowable Perturbatins' for Robust Stability",IEEE T-AC,Vol.AC-28, No.1,Jan 1983
14. Hsi-Han Yeh, S.S.Banda,and D.B.Ridgely,"Stability Robustness Measures Utilizing Structural Information",Int. J. Control,1985,Vol.41,No.2,
15. B.Kouvaritakis & H.Latchman,"Singular-Value and Eigenvalue Techniques in the Analysis of Systems with Structured Perturbation",Int. J. Control,1985,Vol.41,No.6
16. I.Postlethwaite,J.M.Edmunds,and A.G.J.Macfarlane,"Principal Gains and Principal Phases in the Analysis of Linear Multivariable Feedback System",IEEE T-AC,Vol.AC-26,No.1,Feb. 1981
17. R.W.Daniel and B.Kouvaritakis,"A New Robust Stability Criterion for Linear and Non-Linear Multivariable Feedback Systems",Int. J. Control,1985,Vol.41,No.6
18. J.S.Freudenberg,D.P.Looze and Cruz,"Robustness Analysis Using Singular Value Sensitivities",Int.J.Control,1982, Vol.35,No.1
19. J.Doyle,"Analysis of Feedback Systems with Structured Uncertainties",IEE Proc.-D,Vol.129,Part.D,No.6,Nov. 1982
20. M.G.Safonov,"Optimal Diagonal Scaling for Infinity Norm Optimization",Proc. of the American Control Conference,June 19-21,1985
21. B.Kouvaritakis & H.Latchman,"Necessary and Sufficient Stability Criterion for Systems with Structured Uncertainties : the Major Principlal Direction Alignment Principle",Int. J. Control,1985,Vol.42,No.3
22. A.N.Madiwale and D.E.Williams,"Some Extentions of Loop Transfer Recovery",Proceedings of the American Control Conference,June 19-21,1985
23. J.C.Doyle and G.Stein,"Robustness with Observers",IEEE T-AC ,Vol.AC-24,No.4,Aug. 1979
24. P.Molander and J.C.Willems,"Synthesis of State Feedback Controller Laws with a Specified Gain and Phase Margin", IEEE,T-AC,Vol.AC-25,No.5,Oct. 1980
25. P.Kapasouri,M.Athans,and H.A.Apang III,"Gain-Scheduled Multivariable Control for the GE-21 Turbofan Engine Using the LQG/LTR Methodology",Proc. of the American Control Conference,June 19-21,1985
26. E.Soroka and U.Shaked,"On the Robustness of LQ Regulators", IEEE T-AC,Vol.AC-29,No.7,July 1984
27. M.J.Grimble and T.J.Owens,"On Improving the Robustness of LQ Regulators",IEEE T-AC,Vol.AC-31,No.1,Jan. 1986
28. D.S.Bernstein and S.W.Greeley,"Robust Controller Synthesis Using the Maximum Entrophy Design Equation",IEEE T-AC,Vol. AC-31,NO.4,Apr. 1986
29. D.C.Yoular,H.A.Jabr,and J.J.Bongiorno,Jr.,"Modern Wiener-Hopf Design of Optimal Controllers--Part II,the Multivariable case",IEEE T-AC,Vol.AC-21,No.3,June 1976
30. P.J.Antsaklis,"Some Relations Satisfied by Prime Polynomial Matrices and Their Role in Linear Multivariable System Theory",IEEE T-AC,Vol.AC-24,No.4,Aug. 1979
31. C.A.Desoer,R.W.Liu,J.Murry,and R.Saeks,"Feedback System Design: the Fractional Representation Approach to Analysis and Synthesis",IEEE T-AC,Vol.AC-25,No.3,June 1980
32. G.Zames,"Feedback and Optimal Sensitivity : Model Reference Transformations,Multiplicative Seminorms,and Approximate Inverses",IEEE T-AC,Vol.AC-26,No.2,Apr. 1981
33. G.Zames and B.A.Francis,"Feedback,Minmax Sensitivity,and Optimal Robustness",IEEE T-AC,Vol.AC-28,No.5,May 1983
34. M.Vidyasagar,Control System Synthesis: a Factorization Approach,MIT Press,1985
35. M.Vidyasagar,"The Graph Metric for Unstable Plants and Robustness Estimates for Feedback Stability",IEEE T-AC,Vol. AC-29,No.5,May 1984
36. J.Ackermann,"Parameter Space Design of Robust Control Systems",IEEE T-AC,Vol.AC-25,No.6,Dec. 1980
37. E.J.Davison and I.J.Ferguson,"The Design of Controllers for the Multivariable Robust Servomechanism Problem Using Parameter Optimization Methods",IEEE T-AC,Vol.AC-26,No.1,Feb. 1981
38. E.J.Davison and B.R.Copeland,"Gian Margin and Time Lag Tolerance Constraints Applied to the Stabilization Problem and Robust Servomechanism Problem",IEEE T-AC,Vol. AC-30, No.3,Mar. 1985
39. N.A.Lehtomaki,D.A.Castnon,B.C.Levy,G.Stein,N.R.Sandell,and M.Athans,"Robustness and modeling error characterization", IEEE T-AC,Vol. AC-29,No.3,Mar. 1984

40. M.G.Safonof and M.Athans,"Gain and Phase Marginfor Multiloop LQG Regulators",IEEE T-AC,Vol.AC-22,No.2,Apr. 1977

41. V.C.Klema and A.J.Laub,"The Singular Value Decomposition: Its Computation and Some Applications",IEEE T-AC,Vol. AC-25 ,No.2,Apr. 1980

42. F.R.Gantmacher,The Theory of Matrices,Chelsea Publishing Company,1960

43. J.C.Kantor,"The Analysis of Robust Stability and Performance in Multivariable Feedback Systems Using M-matrix",Proceedings of the American Control Conference,June 19-21,1985

44. D.H.Owens and A.Chotai,"On Eigenvalues,Eigenvectors and Singular Values in Robust Stability Analisys",Int. J. Control, 1984,Vol.40,No.2

45. M.K.H.Fan and A.L.Tits,"Characterization and Efficient Computation of the Structured Singular Value",IEEE T-AC,Vol. AC-31,No.8,Aug. 1986

46. R.E.Kalman,"When is a Linear System Optimal?",Trans. ASME Ser. D:J. Basic Eng.,Vol.86,Mar.1964

47. B.D.O.Anderson and J.B.Moore,Linear Optimal Control, Prentice Hall,Inc.,1971

48. J.C.Doyle,"Guaranteed Margins for LQG Regulators",IEEE T-AC ,Vol.AC-23,No.4,Aug. 1978

49. H.K.Khalil,"On the Robustness of Output Feedback Control Methods to Modeling Errors",IEEE T-AC,Vol.AC-26,No.2,Apr. 1981

50. U.Saked and E.Soroka,"On the Stability Robustness of the Continuous-Time LQG Optimal Control",IEEE T-AC,Vol.AC-30, No.10,Oct. 1985

51. M.G.Safonov and B.S.Chen,"Multivariable Stability-Margin Optimization with Decoupling and Output Regulation",IEE Proc.-D,Vol.129,Part D,No.6,Nov.1982

52. M.J.Grimble,"Optimal H-infinity Robustness and the Relationship to LQG Design Problems",Int.J.Control,1986,Vol.43 ,No.2

53. M.Vidyasagar and B.A.Francis,"Algebraic and Topological Aspects of Feedback Stabilization",IEEE T-AC,Vol.AC-27,1982

54. B.A.Francis and M.Vidyasagar,"Algebraic and Topological Aspects of the Regulator Problems for Lumped Linear Systems" ,Automatica,Vol.19,No.1,1983

55. H.Kimura,"Robust Stabilizibility for a Class of Transfer Functions",IEEE T-AC,Vol.AC-29,No.9,Sep. 1984

56. A.Swierniak,"A Unified Approach to Controllers Design for Uncertain Systems",Int. J. Control,1983,Vol.37,No.3

57. E.Zeheb and D.Hertz,"Robust Control of the Characteristic Values of Systems with Possible Parameter Variation",Int. J. Control,1984,Vol.40,No.1

58. H.Kazerooni,P.K.Sheridan,"An Approach to Loop Transfer Recovery Using Eigenstructure Assignment",Proc. of the American Control Conference,June 19-20,1985

59. E.Noldus,"Design of Robust State Feedback Laws",Int. J. Control 1982,Vol.35,No.6

60. I.R.Petersen,"A Riccati Equation Approach to the Design of Stabilizing Controllers and Observers for a Class of Uncertain Linear Systems",Proc. of the American Control Conference,June 19-20,1985

61. R.J.Evans and X.Xianya,"Robust Regulator Design",Int. J. Control,1985,Vol.41,No.2

62. M.J.Chen and C.A.Desoer,"The Problem of Guaranteeing Robust Disturbance Rejection in Linear Multivariable Feedback System",Int. J. Control,1983,Vol.37,No.2

63. S.P.Bhattacharyya,A.C.Del Nero Gomes,and Jo W. Howes,"The Structure of Robust Disturbance Rejection Control",IEEE T-AC ,Vol.AC-28,No.9,Sep. 1983

64. T.Yoshikawa,T.Sugie,and H.Hanafusa,"Synthesis of Robust Tracking Systems with Specified Transfer Matrices",Int. J. Control,1986,Vol.43,No.4