

2변수 시계열 모델 산출을 위한 소형컴퓨터용 알고리즘

김광준 문인혁 박병호
한국과학기술원 생산공학과

Algorithms for Bivariate Time Series Modeling
in Small Size Computers

Kwang-Joon Kim In-Hyuk Moon Byung-Ho Park
Department of Production Engineering

Abstract

Several algorithms for bivariate time series modeling are reviewed : linear least square, nonlinear least squares, generalized least square, and multi-stage least square methods. Estimation results of simulated data by the above methods are discussed.

$$\begin{pmatrix} x_{2t} \\ x_{1t} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{111} & \phi_{121} \\ \phi_{211} & \phi_{221} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_{2t-1} \\ x_{1t-1} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \phi_{112} & \phi_{122} \\ \phi_{212} & \phi_{222} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_{2t-2} \\ x_{1t-2} \end{pmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} \phi_{11n} & \phi_{12n} \\ \phi_{21n} & \phi_{22n} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_{2t-n} \\ x_{1t-n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n_{2t} \\ n_{1t} \end{pmatrix} \quad (1)$$

여기서 $E \begin{pmatrix} n_{2t} \\ n_{1t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$: 평균치행렬

$$E \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} n_{2t} \\ n_{1t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_{2t} \\ n_{1t} \end{pmatrix}^T \\ \begin{pmatrix} n_{2t} \\ n_{1t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_{2t} \\ n_{1t} \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E[n_{2t} \ n_{2t}] & E[n_{2t} \ n_{1t}] \\ E[n_{1t} \ n_{2t}] & E[n_{1t} \ n_{1t}] \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{공통} \\ \text{공분산} \\ \text{행렬} \end{matrix}$$

1. 서론

시스템의 동적특성을 규명하기 위한 실험적 방법으로는, 시간영역에서 측정된 신호를 주파수영역으로 변환한 후 적당한 수학적 모델에 맞추는 방법과 시간영역신호를 그대로 수학적 모델에 맞추는 방법등, 2가지가 있다. 전자의 경우에 주파수 영역으로 변환하는 방법은 거의 표준화되어 있지만 수학적 모델링방법 및 절차가 매우 다양하듯이(1), 후자도 방법론이 매우 다양하다(2). 본 발표에서는 후자방법론중 2변수 시계열 모델에 대하여 그 여러가지 형태 및 특징을 살펴보고, 최근 발표된 알고리즘(3)을 이용하여 프로그램을 작성한 후 종래의 여러가지 방법론과 비교검토하여 보고자 한다.

위모델의 매개변수 ϕ_{ijk} , $i, j=1, 2, k=1, 2, \dots, n$ 는 반복적 방법(relaxation algorithm) (4)으로 계산될 수 있으며, 입출력 잡음이 서로 독립적이고 똑같은 자기분산을 가질 경우에는 반복잡업없이 계산될 수 있다. 위모델이 산출되면 전진이 송계뿐만 아니라 후진이송계의 특성도 규명되게 된다.

2. 2변수 시계열 모델의 여러가지 형태

(1) 단힘루우프계에 대한 모델

한 단힘 루우프계에 대한 모델로서 입출력 x_{1t}, x_{2t} 및 각각에 관련되는 잡음 n_{1t}, n_{2t} 를 이용한 다음식을 가정할 수 있다.

(2) 얼림루우프계에 대한 모델

단일입력 x_t 와 단일출력 y_t , 각각에 관련된 잡음 n_{xt}, n_{yt} 를 이용하여 얼림루우프계에 대한 모델은 다음과 같이 가정할 수 있다.

$$\begin{aligned} y_t &= \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_n y_{t-n} \quad (2) \\ &+ \psi_1 x_{t-1} + \psi_2 x_{t-2} + \dots + \psi_n x_{t-n} + n_{yt} \\ x_t &= \alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2} + \dots + \alpha_p x_{t-p} + n_{xt} \quad (3) \end{aligned}$$

여기서 $E[n_{yt}] = 0$
 $E[n_{xt}] = 0$

Eq.(2) 및 Eq.(3) 의 매개변수들은 각각 독립적으로 구해질 수 있으며, Eq.(2)의 경우에 가중된(Weighted) BLUE(Best Linear Unbiased Estimator) 는 N개의 샘플자료로부터 다음과 같이 계산된다.

$$\hat{\theta} = (X^T R^{-1} X)^{-1} X^T R^{-1} Y \quad (4)$$

여기서

$$\hat{\theta}^T = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \dots \quad \phi_n \quad \psi_1 \quad \psi_2 \dots \psi_n]$$

여기서 X 와 Y 는 각각 입력력자료로 구성되는 $(N \times 2n)$, $(N \times 1)$ 행렬이며 R 는 가중을 위한 행렬로 다음과 같이 주어진다.

$$R = \begin{bmatrix} E[n_{y1}n_{y1}] & E[n_{y1}n_{y2}] & \dots & E[n_{y1}n_{yN}] \\ E[n_{y2}n_{y1}] & E[n_{y2}n_{y2}] & \dots & E[n_{y2}n_{yN}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E[n_{yN}n_{y1}] & E[n_{yN}n_{y2}] & \dots & E[n_{yN}n_{yN}] \end{bmatrix} \quad (5)$$

그러나 이 행렬의 엄밀한 계산은 불가능하기 때문에

$R = \sigma_a^2 I$ 로 가정하여 Eq.(4) 에 대입함으로써 매개변수를 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\hat{\theta} = (X^T X)^{-1} X^T Y \quad (6)$$

또하나의 방법은 Eq.(2)의 모델을 다음과 같이 바꾸어 다음절의 비선형최소자승법을 이용하는 것이다.

$$y_t = \sum_{i=1}^n \phi_i y_{t-i} + \sum_{i=1}^n \psi_i x_{t-i} + a_t - \sum_{i=1}^m \theta_i a_{t-i} \quad (7)$$

여기서

$$E[a_t] = 0 \quad E[a_t a_{t-k}] = \delta_k \sigma_a^2$$

이 방법은 Eq.(2) 에서의 잡음 n_{yt} 를 오차로 간주하여 이들의 자승의 합을 최소화하는 방향으로 Eq.(6) 과 같이 매개변수를 산출하며 모델의 적합한 차수는 다음에 정의되는 FPE(Final Prediction Error) 가 최소가 되는 n 값으로 결정된다(2). 그러나 이렇게

$$FPE(n, N) = \frac{N+2n+1}{N-2n-1} \hat{\sigma}_{ny}^2(n) \quad (8)$$

산출된 매개변수는 평형성(Unbiasedness) 이 보장되지 않는 것이 단점이다.

(2) 비선형최소자승법 (Nonlinear Least Squares Method, NLS)

(1) 방법의 불평형성(Bias) 문제점은 Eq.(7)의 모델에 의해 해결될 수 있다. 역함수를 이용하여 ϕ, ψ, θ 의 초기치를 구하고, 이를 출발점으로 일반적인 비선형최소자승법을 적용함으로써 최종치를 구하게 되며, 적합한 차수는 통계적인 가정시험법의 하나인 F- 테스트를 이용하는 것이 효과적이다(5). 그러나 이 방법의 단점은 계산시간이 많이 필요하여 주로 중대형 컴퓨터에서 가능하다는 것이다.

(3) 일반화된 최소자승법 (Generalized Least Squares Method, GLS)

Eq.(6) 의 결과는 잡음 n_{yt} 가 $E[n_{yt}n_{yt-k}] = \delta_k \sigma_{ny}^2$ 을 만족시키지 않을 경우 불평형성을 보장하지 않으므로 매개변수 산출후의 잔차 $\hat{n}_{yt} = y_t - \sum_{i=1}^n \hat{\phi}_i y_{t-i} - \sum_{i=1}^n \hat{\psi}_i x_{t-i}$ 에 대하여 다음과 같이 다시 단일변수 AR 모델을 세운다

$$\Gamma(B) \hat{n}_{yt} = a_t \quad (9)$$

$$\Gamma(B) = 1 - \sum_{i=1}^m \gamma_i B^i$$

$$E[a_t] = 0 \quad E[a_t a_{t-k}] = \delta_k \sigma_a^2$$

여기서 구해진 $\hat{\Gamma}(B)$ 를 이용하여 자료를 아래와 같이 변환하고,

3. 열림루우르계의 2변수모델링 방법

(1) 선형최소자승법 (Linear Least Squares Method, LLS)

$$y_t^* = \hat{\Gamma}(B)y_t, \quad x_t^* = \hat{\Gamma}(B)x_t \quad (10)$$

이들로 구성된 다음 모델의 매개변수를 선형최소자승법으로 산출한다.

$$y_t^* = \sum_{i=1}^n \phi_i y_{t-i}^* + \sum_{i=1}^n \psi_i x_{t-i}^* + n_{yt}^* \quad (11)$$

하나의 설정된 차수에 대하여 매개변수들이 수렴할 때까지 반복 계산을 수행하며, 적합한 차수는 RSS (Residual Sum of Squares) 의 감소 정도를 시험하는 방법에 따라 결정한다.

(4) 다단계 최소자승법 (Multistage Least Squares Method, MSLS)

이 방법은 Eq.(7) 의 모델을 세우게 되는데, 우선 Eq.(6) 을 이용하여 Eq.(2)를 산출한다. 잔차 \hat{n}_{yt} 를 계산한 후, Eq.(7) 의 a_t 와 근사적으로 같다고 보아 맨 우측항인 $\sum_{i=1}^m \theta_i a_{t-i}$ 에 대입한다. 이렇게 되면 Eq.(7) 로부터 유도되는 다음의 목적함수는 매개변수들의 2차식이 되므로 선형최소자승법으로 해결할 수 있다.

$$\sum_{t=1}^N a_t^2 = \sum_{t=1}^N \left\{ y_t - \sum_{i=1}^n \phi_i y_{t-i} - \sum_{i=1}^n \psi_i x_{t-i} + \sum_{i=1}^m \theta_i a_{t-i} \right\}^2 \quad (12)$$

여기서 잔차 a_t 를 다시 산출하고 같은 방법으로 $\phi, \psi, \theta, \Sigma a_t^2$ 이 수렴할 때까지 반복한다(6).

4. 시뮬레이션자료에 대한 해석에

위에서 설명한 열림루우프계에 대한 여러가지 2변수 모델링방법의 장단점을 엄밀한 의미에서 비교하는 것은 매우 어렵다. 따라서 본 발표에서는 이론적인 모델로부터 만들어진 자료를 해석하여 원모델과 비교하는 방법을 택하였다.

시뮬레이션에 사용된 모델은 아래에 보인 바와 같다.

$$S1 : (1-0.9B+0.9B^2)y_t = (B+0.5B^2)x_t + (1-0.5B)a_t$$

$$S2 : (1-1.6B+1.6B^2-0.776B^3+0.4B^4)y_t = (1.2B-0.9B^2+0.3B^3+0.1B^4)x_t + (1-0.6B+0.4B^2-0.05B^3)a_t$$

$$S3 : (1-0.408B+1.52B^2-0.979B^3+1.388B^4-0.363B^5+0.758B^6)y_t = (B+0.45B^2+0.86B^3+0.2B^4+0.27B^5-0.1B^6)x_t + (1-1.4B+B^2-0.5B^3+0.16B^4-0.05B^5)a_t$$

$$S4 : (1-0.9B+0.9B^2)y_t = (B+0.5B^2)x_t + a_t/(1-0.5B)$$

여기서 시스템에서의 입력 x_t 및 잡음 a_t 에는 각각 서로 독립적이고 균일분포를 갖는 백색잡음을 이용하였다. 각 모델로부터 만들어진 입출력자료 500개에 대하여 전장에서 설명된 여러가지 모델링 방법, 즉, LLS, NLS, GLS 및 MSLS 를 적용하였으며, 그 결과를 Table 1 - Table 4 에 보인다.

Fig.1 과 Fig.2 에는 모델 S1 과 S3 에 대하여 계의 주파수응답함수인 $\psi(B)/\phi(B)$ 의 허수부만이 보여진다. 이 단계에서 Backshift B 대신에 $\exp[-j\omega\Delta]$ 를 대입하였으며, 샘플링 간격인 Δ 는 1초를 사용하였다.

이상의 해석에만으로써 여러가지 모델링방법의 장단점을 비교하는 것은 이미 언급한 바처럼 지극히 어려운 일이다. 그러나 각 모델별로 산출결과를 검토하는 것이 어느정도의 의미는 있을 것으로 보인다.

S1 과 S2 모델에 대한 결과는 NLS, MSLS, 및 LLS 방법이 매개변수뿐만 아니라 RSS 의 크기도 거의 같음을 보여준다. 그러나 LLS 나 MSLS에 비해 NLS 의 경우엔 프로그램양과 더불어 계산시간이 매우 커지는 단점을 생각해야 한다. 한편 시스템출력에서의 잡음이 백색이 아닌 경우에 LLS 방법을 적용함에 있어서 시스템의

차수보다 높은 차수의 모델을 세움으로써 RSS 를 보다 줄이고 Bias도 줄일 수 있는것이 확인되고 있다. 모델 S3에 대한 결과는 LLS 나 MSLS에 비해 NLS 가 한층 작은 RSS 를 보여주고 있다. 계의 매개변수나 주파수 특성은 각 방법의 결과가 큰 차이없음을 나타내나, LLS 에 의한 모델링이 어느정도의 문제점은 가지고 있음을 짐작할 수 있다. S4 모델은 GLS 방법의 적용을 위한 것이었는데, GLS 뿐만 아니라 LLS 에 의해서도 정확한 모델링이 가능함을 보여주는 사실은 $\phi(B)$ 와 $\psi(B)$ 의 한 특성해가 각각 0.482, 0.497 로서 이론적모델의 모습을 그대로 보여주고 있다는 것이다.

5. 결 론

현재까지 시계열 모델링프로그램은 주로 대형컴퓨터에서 off-line 으로 비선형최소자승법에 의존하여왔다. 물론 선형 및 유사선형 최소자승법의 이론적 배경은 이미 오래전에 준비되어 있었지만 널리 사용되지는 못하였다. 최근에 급속도로 개발되고 있는 퍼스널 컴퓨터의 계산능력의 향상은 이러한 유사선형최소자승법에 의한 시계열 자료 모델링을 현실화시키고 있다. 특히 이 방법을 고속푸리에 변환기에 의한 해석이 어렵거나 그 장점이 적용되지 않는, 예를들면 자료의 양이 평균화하기에 충분하지 않은, 경우에 적용하면 그 효과가 매우 클 것으로 기대된다.

6. 참고문헌

- (1) Kwang-Joon Kim and Choong-Gun Sim, "A New Curve Fitting Algorithm for Modal Parameter Estimation," to be presented at the 5th International Modal Analysis Conference in London, April, 1987.
- (2) P. Eykhoff, Trends and Progress in System Identification, Pergamon Press, 1981.
- (3) H. Splid, "A Fast Estimation Method for the Vector Autoregressive Moving Average Model with Exogenous Variables," J. of the

American Statistical Association, Vol.78, December, 1983.

- (4) G.C. Goodwin and R.L. Payne, Dynamic System Identification Experiment Design and Data Analysis, Academic Press, 1977.
- (5) S.M. Pandit and S.M. Wu, Time Series and System Analysis with Applications, Wiley & Sons, 1983.
- (6) 문인혁, 퍼스널 컴퓨터용 2변수 시계열모델링 전산프로그램의 개발과 모우드해석에의 응용, 한국과학기술원 생산공학과 석사학위논문, 1986.

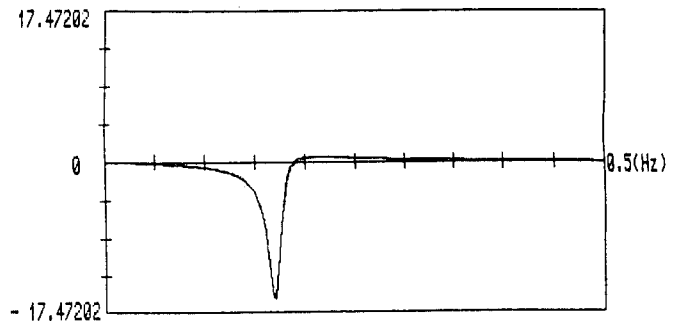


Fig.1 Imaginary Parts of System Frequency Responses for Model S1 by LLS, NLS and MSLS (Curves are superposed)

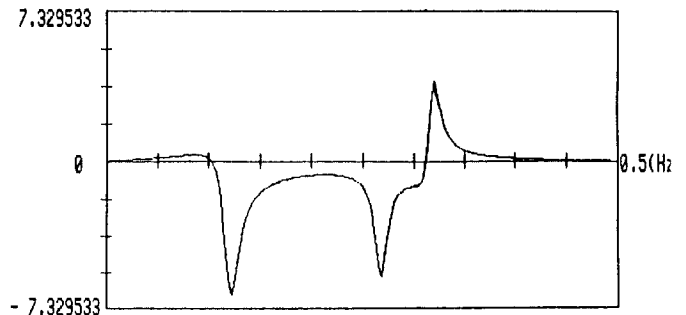


Fig.2 Imaginary Parts of System Frequency Responses for Model S3 by LLS, NLS and MSLS (Curves are superposed)

No. of Data = 500 , $\sigma_x^2 = 1.02$, $\sigma_a^2 = 0.33$

	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_1	ϕ_2	θ_1	RSS
True Value	0.9	-0.9	1.0	0.5	0.5	
NLS	0.912	-0.906	1.035	0.487	0.484	161.4
MSLS	0.914	-0.908	1.034	0.468	0.491	161.8
LLS	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4		158.9
	0.424	-0.723	-0.208	-0.235		
	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4		
	1.0	0.976	0.532	0.139		

Table 1 Estimation Results for Model S1

No. of Data = 500 , $\sigma_x^2 = 3.367$, $\sigma_a^2 = 0.096$

	ϕ_1	ϕ_2	ψ_1	ψ_2	γ_1		RSS
True Value	0.9	-0.9	1.0	0.5	0.5		
GLS	0.903	-0.897	1.0	0.52	0.478		27.3
LLS	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ψ_1	ψ_2	ψ_3	27.3
	1.384	-1.332	0.433	1.0	0.04	-0.249	

Table 4 Estimation Results for Model S4

No. of Data = 500 , $\sigma_x^2 = 1.02$, $\sigma_a^2 = 0.33$

	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4	θ_1	θ_2	θ_3	RSS
True Value	1.6	-1.6	0.776	-0.4	1.2	-0.9	0.3	0.1	0.6	-0.4	0.05	
NLS	1.557	-1.574	0.787	-0.387	1.234	-0.919	0.345	0.046	0.53	-0.372	-0.03	160.2
MSLS	1.583	-1.581	0.766	-0.406	1.235	-0.948	0.35	0.08	0.559	-0.368	-0.06	160.6
LLS	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4	ϕ_5	ϕ_6	ϕ_7	ϕ_8	ϕ_9			159.2
	1.017	-0.635	0.091	-0.229	-0.086	0.081	-0.049	0.070	-0.028			
	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4	ψ_5	ψ_6	ψ_7	ψ_8	ψ_9			
	1.243	-0.242	-0.247	-0.040	0.150	0.140	-0.084	0.007	0.072			

Table 2 Estimation Results for Model S2

No. of Data = 500 , $\sigma_x^2 = 1.02$, $\sigma_a^2 = 0.013$

	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4	ϕ_5	ϕ_6	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	RSS
True Value	0.408	-1.528	0.979	-1.388	0.363	-0.748	1.4	-1.0	0.5	-0.16	0.05	
NLS	0.404	-1.54	0.986	-1.393	0.362	-0.756	1.165	-0.889	0.231	0.016	-0.159	6.98
MSLS	0.398	-1.532	0.977	-1.387	0.356	-0.754	1.168	-0.957	0.309	-0.032	-0.089	7.92
True Value	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4	ϕ_5	ϕ_6						
	1.0	0.45	0.86	0.2	0.27	-0.1						
	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4	ψ_5	ψ_6						
NLS	1.0	0.444	0.889	0.193	0.264	-0.086						
MSLS	1.0	0.452	0.886	0.192	0.272	-0.09						
LLS	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4	ϕ_5	ϕ_6	ϕ_7	ϕ_8	ϕ_9			9.11
	-0.757	-1.625	-0.641	-1.079	-0.818	-1.037	0.780	-0.388	-0.058			
	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4	ψ_5	ψ_6	ψ_7	ψ_8	ψ_9			
	1.008	1.614	1.964	1.534	1.013	0.394	0.057	-0.029	0.004			

Table 3 Estimation Results for Model S3