

비선형 요소가 결합된 선형역학시스템의 해석에의
Fourier 스펙트럼 해석기법의 응용

성 단 근

한국과학기술대학 전자·전산학부

An Application of Fourier Spectral Analysis to the Analysis of Linear
Dynamic Systems Coupled with NonLinear Elements

Dan Keun Sung

Korea Institute of Technology

Abstract

The Fourier Spectral Analysis has been widely utilized in the analysis of linear dynamic systems. However, it may not be generally extended to analyze nonlinear systems. In this paper, a linear underlying dynamic structure coupled with nonlinear elements is analyzed by using newly derived equations of motion after the linear dynamic structure is characterized by the Fourier spectral analysis.

1. 서론

Fourier 변환은 1800년대 초 폴란드 수학자 Joseph Fourier에 의해 발견된 이후 많은 형태의 공학, 물리학 및 수학 등의 문제들을 해결하는데 성공적으로 사용되어 왔다. 최근에는 각종 Fourier 스펙트럼 분석기가 많이 출현하여 여러 분야에서 이용되고 있으며, 역학시스템에도 광범위하게 이용되고 있다. 역학시스템에서는 시험점에서의 힘(force)과 가속도(acceleration) 등을 나타내는 시간 영역 신호로부터 주파수 영역에서 전력스펙트럼(Power Spectrum)과 주파수 응답함수(frequency response function) 등을 디지털 형태로 계산할 수 있다 [1, 2]. 구하여진 주파수 응답 함수는 Laplace 영역으로의 전달함수(transfer function)로 변환 가능하며 [1], 이 전달함수는 주어진 역학시스템을 이해하는 데 사용된다. 본 논문은 Fourier 스펙트럼 분석기에 의해 구해지는 주파수 응답함수가 주어진 경우에 이것을 이용하여 Laplace 영역으로 변환후 비선형 요소가 결합된 전체시스템을 해석할 수 있는 하나의 기법을 제안한다.

2. 주파수 응답함수(Frequency Response Function)

주파수 응답함수 $H(\omega)$ 는 아래와 같이 정의할 수 있다.

$$H(\omega) = Y(\omega)/X(\omega). \quad (1)$$

여기서 $Y(\omega)$ 는 출력(응답)에 대한 Fourier 변환이고 $X(\omega)$ 는 입력에 대한 Fourier 변환이다. 그렇지만 $Y(\omega)$ 와 $X(\omega)$ 가 랜덤프로세스의 결과이면 위의 정의는 전력스펙트럼을 이용하여 다음과 같은 방식으로 구하여야 한다.

$$H(\omega) = Y(\omega) X^*(\omega) / [X(\omega) X^*(\omega)] \\ = G_{yx}(\omega) / G_x(\omega). \quad (2)$$

여기서,

$$G_x(\omega) = X(\omega) X^*(\omega) \equiv \text{입력 auto spectrum} \\ G_{yx}(\omega) = Y(\omega) X^*(\omega) \equiv \text{출력(응답) - 입력} \\ \text{Cross Spectrum}$$

6개의 기본적인 주파수 응답함수가 역학시스템을 해석하기 위해 사용될 수 있으며 이들이 표 1에 주어져 있다. 특기할 만한 사항은 어느 하나의 주파수 응답함수에서 쉽게 다른 주파수 응답함수로 변환할 수 있다는 것으로, 예를 들어, 기계적 임피던스(Mechanical Impedance) 주파수 응답함수, $Z(\omega)$ 와 동적 질량(Dynamic Mass) 주파수 응답함수, $M(\omega)$ 사이의 관계식은

$$Z(\omega) = (j\omega) M(\omega). \quad (3)$$

표 1 : Frequency Response Function

Response Parameter	Response/Force	Force/Response
Displacement	Receptance	Dynamic Stiffness
Velocity	Mobility	Mechanical Impedance
Acceleration	Inertance	Dynamic Mass

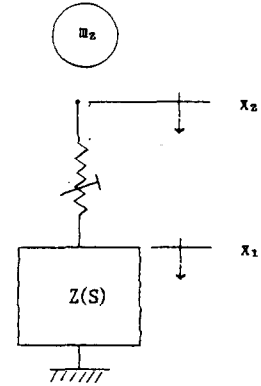


그림 1 : 시스템 모델

주파수 응답함수로 부터 Laplace 영역으로의 전달함수는 "1/2 전력점(half-power point)" 방식과 "원-피팅(Circle-fitting)" 방식 등 (1) 여러가지 방식에 의해 구해질 수 있으며 여기서 구하여진 전달함수는 역학시스템의 해석에 이용된다. 기본적으로 Laplace 연산자는 댐핑(damping)에 관한 정보도 포함하고 있으므로 Fourier 영역에서 보다 더 많은 정보를 지닐 수 있다.

3. 시스템 모델의 해석

주어진 역학시스템은 하부역학구조(underlying dynamic structure)위에 비선형 요소가 결합되어 있고 하부역학구조는 선형이라고 가정하면, 이 선형시스템은 근본적으로 Fourier 스펙트럼 분석기에 의해 해석이 가능하다. 하부역학시스템과 비선형 요소가 결합된 전체 시스템의 모델이 그림 1에 나타나 있으며, 하부역학시스템은 기계적 임피던스(Mechanical Impedance) 전달함수로 표시되며 비선형 요소는 간단히 비선형 스프링으로 결합된 것으로 가정하고 전체 시스템은 하나의 충격(Impact)현상 (3)을 나타낸다.

위의 충격현상을 나타내기 위한 모델링 식은 다음과 같다.

$$m_2 \ddot{x}_2(t) + \int_0^t z(t-t_1) \dot{x}_1(t_1) dt_1 = 0 \quad (4)$$

$$m_2 \ddot{x}_2(t) + f(x_1, \dot{x}_1) = 0 \quad (5)$$

여기서 $x_1(0) = 0$, $\dot{x}_1(0) = V$ 그리고 $f(x_1, \dot{x}_1)$ 는 비선형적인 스프링에 가해지는 힘을 나타낸다.

특기할 사항은 하부역학시스템은 일반적으로 N-DOF (Degree-of-freedom) 시스템이므로 N 개의 2차(second order) 미분방정식이 현상을 표현하기 위해 필요하지만 상기의 모델링 식은 하나의 미분-적분 방정식으로 이 하부역학시스템을 나타내었다.

모델링 식에서 기계적 임피던스(Mechanical Impedance)로 표현되어 있지만 쉽게 이 전달함수는 리셉턴스(Receptance) 전달함수로 바꿀 수 있다.

$$X_1(s)/F(s) = \sum_{i=1}^{2n} R_i/(S-P_i) \quad (6)$$

여기서

$$P_k = \sigma_k + j(\omega_d)_k$$

$$P_{k+1} = \sigma_k - j(\omega_d)_k, \quad k = 1, 3, 5, \dots, 2n-1$$

P_i 는 폴(pole)을 나타내고 R_i 는 P_i 에 대한 레지듀(residue)를 나타낸다.

$$Y_i(S) = F(s)/(S-P_i), \quad i = 1, 2, \dots, 2n \quad (7)$$

이라고 가정하면 이것을 미분방정식 형태로 바꾸면,

$$\dot{y}(t) = P y(t) + B f(t) \quad (8)$$

여기서

$$y(t) = \begin{Bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_{2n}(t) \end{Bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & P_2 & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & P_{2n} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

P의 각 요소는 복소수 형태를 나타내므로 복소수 영역에서의 미분방정식을 실수 영역에서의 미분방정식으로 변환하기 위해 새로운 변환이 필요하다.

$$y(t) = Qa(t) \quad (9)$$

여기서,

$$Q = 0.5 \begin{bmatrix} 1-j & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1+j & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-j & & & \\ \vdots & \vdots & 1+j & & & \\ 0 & 0 & & & 1-j & \\ 0 & 0 & & & 1+j & \end{bmatrix}$$

그러면,

$$\dot{a}(t) = A_1 a(t) + B_1 f(t) \quad (10)$$

가 주어지며 여기서,

$$A_1 = \begin{bmatrix} \sigma_1 & (\omega_d)_1 & \dots & 0 & 0 \\ -(\omega_d)_1 & \sigma_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \sigma_2 & (\omega_d)_2 & \vdots \\ 0 & 0 & -(\omega_d)_2 & \sigma_2 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \sigma_{2n-1} & (\omega_d)_{2n-1} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & -(\omega_d)_{2n-1} & \sigma_{2n-1} \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ \vdots \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a(t)가 구해지면 식(9)에서 y(t)가 구해지며, 식(6)과(7)에 의해 X₁(s)가 구해지며 이것을 Inverse Laplace 변환하여 간단히 하면

$$x_1 = \sum_{i=1}^n [\operatorname{Re}(R_{2i-1}) a_{2i-1} + \operatorname{Im}(R_{2i-1}) a_{2i}] \quad (11)$$

여기서 Re(R_{2i-1})와 Im(R_{2i-1})은 각각 레지듀(residue)의 실수부와 허수부를 나타낸다.

만약 이 모델의 비선형 스프링 힘이

$$f(x_1, x_2) = k_j(x_1(t) - x_2(t))^2 \quad (12)$$

으로 주어질 경우에 우리가 이 힘을 구하고자 할때 상태방정식을 이용하여 우선에

$$u_1 = x_2(t) \quad (13)$$

$$u_2 = \dot{x}_2(t) \quad (14)$$

을 나타내면 식(5)를 두개의 1차 미분방정식으로 나타낼 수 있다.

$$\dot{u}_1 = u_2 \quad (15)$$

$$\dot{u}_2 = -(k_j/m_2)(x_1(t) - u_1(t))^2 \quad (16)$$

여기서 u₁(0) = 0, u₂(0) = V, x₁(0) = 0. x₁(t)는 식(11)에서 주어지며 이 x₂(t)는 식(10)에 의해 결정된다. 그러므로 식(15), (16), (10)을 Runge-Kutta 수치해석 [4]에 의해 구하며, 그 결과에 따라 식(11)과(12)에 의해 비선형 요소에 가해지는 힘, f(t)를 계산할 수 있으며 위의 모델을 해석할 수 있다.

4. 결론

일반적으로 Fourier 스펙트럼 해석기법은 선형시스템의 해석에 사용되며, 비선형 시스템으로 확장 응용되지 않는다. 그렇지만 본 논문에는 역학시스템의 하부구조가 선형이며 비선형요소가 결합된 모델을 해석하고자 하여 선형인 하부 구조에 대하여 Fourier 스펙트럼 해석에 의한 분석결과를 이용하고 비선형 요소까지 포함된 전체 시스템의 모델을 비선형 미분 적분 방정식으로 나타낸 후 이것을 수치해석으로 해석하는 기법이 제시되었다. 이러한 기법은 복잡한 역학시스템을 Fourier 스펙트럼 분석기에 의한 결과로 하나의 미분 적분 방정식으로 간단히 모델링 가능하게 되며 실험의 결과가 모델링식에 직접 사용되므로 모델링 기법의 새로운 시도이다.

참고문헌

- [1]. Smith, C. C. and Thornhill, J., Fourier and Spectral Analysis, Class Note, The University of Texas of Austin, 1983.
- [2]. Ramsey, K. A., "Effective Measurement for Structural Dynamics Testing : Part I, "Sound and Vibration", pp. 24-35, Nov. 1975.
- [3]. Sung D. K., Modeling and Analysis of a Non-linear Elastomer Impact Problem, Ph. D. dissertation, The University of Texas at Austin, 1986.
- [4]. Conte, S. D. and de Boor, C., Elementary Numerical Analysis, McGraw-Hill, 1972.