로보트 팔의 최소시간 위치제어에 관한 연구

°김 종 찬 배 준 경 박 종 국
경희대학교 공과대학 전자공학과

A Study on Time Optimal Positioning Control of Robotic Manipulator

Jong-Chan Kim, Jun-Kyung Bae, Chong-Kug Park
Department of Electronics, Kyung Hee Univ.

ABSTRACT

In this paper, time optimal positioning control of the robotic manipulator is discussed. The equations for dynamic model of the robotic manipulator are nonlinear,and each link is highly coupled. A feedback linearizing and decoupling transformation makes the dynamic model linearized and decoupled, and optimal control input for the linear and decoupled system is derived.

1. 서 론

자유도 N인 로보트 팔은 그림 1.과 같이 N개의 연결봉이 접합점에 의해서 직렬로 연결된 구조를 가진다. 접합점은 회전운동이 가능한 접합점, 혹은 선형 운동이 가능한 접합점일 수 있으며, 각각의 접합점은 1개의 자유도를 가지며 접합점의 총 갯수는 로보트 팔 전체의 자유도를 나타낸다. 로보트 팔에 의해서 수행되는 작업은 이동작업과 추적작업이 있으며, 여기서는 이동 작업에서의 거친 운동에 대해서 설명하게 되며 구체적으로는 로보트 팔이 이동 작업을 수행하는데 있어서 시간적으로 가장 빠르게 작업을 수행하도록 하는 최적 입력을 유도한다.

먼저 manipulator와 actuator의 동적모델[1-2]을 제시하고 모델에 대한 운동 방정식을 선형적으로 해주고 연결봉사이의 디커플을 위해서 궤환 선형 디커플링 변환[3]을 도입한다. 궤환 선형 디커플링변환 도입후의 시스템은 각각 1개의 자유도를 나타내고, 3개의 적분 요소로 구성되며, 최소시간 위치제어 문제를 해결할 수 있게 된다.

2. manipulator와 actuator의 동적모델

(1) manipulator의 동적모델

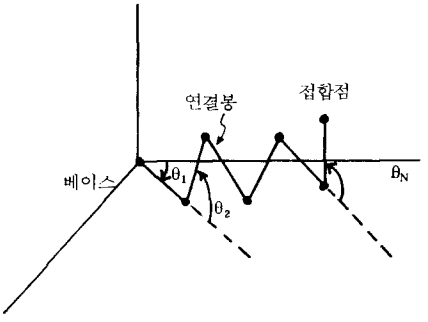

그림 1. 자유도 N인 manipulator의 구조

그림 1.은 자유도가 N인 manipulator로서 N개의 연결봉이 접합점에서 직렬로 연결된 형태이다. 자유도 N인 manipulator의 모델식은 아래와 같다.

$$\underline{T} = \hat{J}(\underline{\theta},t)\dot{\underline{\omega}} + \underline{f}(\underline{\theta},\underline{\omega},t) \quad (1)$$

$$\underline{f}(\underline{\theta},\underline{\omega},t) = \underline{l}(\underline{\theta},\underline{\omega},t) + \begin{matrix}\underline{\omega}^T G^1(\theta)\,\underline{\omega} \\ \underline{\omega}^T G^2(\theta)\,\underline{\omega} \\ \vdots \\ \underline{\omega}^T G^N(\theta)\,\underline{\omega}\end{matrix} \quad (2)$$

여기서, $\underline{\theta} = (\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_N)^T$ 접합점의 위치벡터

$\underline{\omega} = (\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_N)^T$ 접합점의 속도벡터

$\dot{\underline{\omega}} = (\dot{\omega}_1,\dot{\omega}_2,\cdots,\dot{\omega}_N)^T$ 접합점의 가속도벡터

$\underline{T} = (T_1,T_2,\cdots,T_N)^T$ 접합점에 적용하는 토크

$\hat{J}(\underline{\theta},t)$는 관성

$\underline{l}(\underline{\theta},\underline{\omega},t)$는 외부의 부하와 중력을 나타내는 벡터

$G^i(\underline{\theta})$는 weighting matrix, $i=1,2,\cdots,N$

(2) actuator의 동적모델

actuator는 manipulator에 구동력을 제공하며, step 모터, D.C모터, 유압피스톤, 그리고 공기압 피스톤이 있다.[4] 자유도 N인 manipulator는 각각의 접합점에 위치한 N개

의 actuator에 의해서 구동된다고 가정한다. 여기에서 actuator는 전기자 전류제어방식 D.C모터이다. i번째의 actuator는 기어를 통해서 i번째 접합점을 구동시키며, 모델식은 아래와 같다.

$$A_i\theta_i + B_i\omega_i + J_i\dot{\omega}_i + T_i = r_iKT_iI_i \quad (3)$$

$$L_i\dot{I}_i + R_iI_i + r_iKv_i\omega_i = V_i \quad (4)$$

$$i = 1, 2, 3, \cdots\cdots, N$$

여기서, V_i는 i번째 actuator의 입력전압

T_i는 i번째 접합점에 작용하는 토크

I_i는 i번째 actuator의 전기자 전류

r_i는 치차감속비

B_i는 i번째 actuator의 점성마찰계수

J_i는 i번째 actuator의 회전자관성

A_i는 i번째 actuator의 탄성계수

R_i는 i번째 전기자 오옴저항

L_i는 i번째 전기자 인덕턴스

KT_i는 i번째 actuator의 토크상수

KV_i는 i번째 actuator의 역기전력상수

(3), (4) 식을 벡터식으로 다시 쓰면

$$\bar{J}\dot{\underline{\omega}} + \underline{T} = C\underline{I} - A\underline{\theta} - B\underline{\omega} \quad (5)$$

$$\dot{\underline{I}} = F_1\underline{\omega} + F_2\underline{I} + L^{-1}\underline{V} \quad (6)$$

여기서, $\bar{J}$는 $\bar{J}_{ii} = J_i$인 대각행렬

F_1은 $F_{1i} = -r_iKV_i / L_i$인 대각행렬

F_2은 $F_{2i} = -R_i / L_i$인 대각행렬

C 는 $C_{ii} = r_iKT_i$인 대각행렬

A 는 $A_{ii} = A_i$인 대각행렬

B 는 $B_{ii} = B_i$인 대각행렬

L 은 $L_{ii} = L_i$인 대각행렬

3. 결합모델의 상태방정식

자유도 N인 manipulator의 운동식과 actuator의 동적모델식을 결합하여, 결합모델의 상태변수를 접합점의 위치 속도, 그리고 전기자 전류로 잡아준다.

$$\underline{X}_1 = \underline{\theta}$$

$$\underline{X}_2 = \underline{\omega}$$

$$\underline{X}_3 = \underline{I} \quad (7)$$

$$\underline{X} = (\underline{X}_1, \underline{X}_2, \underline{X}_3)^T$$

manipulator의 동적 모델식과 actuator의 동적 모델식을 상태변수의 식으로 쓰고 이로부터 상태방적식을 구하면,

$$\dot{\underline{X}}_1 = \underline{X}_2$$

$$\dot{\underline{X}}_2 = \underline{g}(\underline{x}, t) \quad (8)$$

$$\dot{\underline{X}}_3 = F_1\underline{X}_2 + F_2\underline{X}_3 + L^{-1}\underline{V}$$

여기서, $\underline{g}(\underline{X}, t) = J(\underline{X}_1, t)^{-1}[C\underline{X}_3 - \underline{f}(\underline{X}_1, \underline{X}_2, t) - A\underline{X}_1 - B\underline{X}_2]$ (9)

$$J(\underline{X}_1, t) = \hat{J}(\underline{X}_1, t) + \bar{J} \quad (10)$$

그림 2.는 결합모델의 블럭선도를 나타낸다.

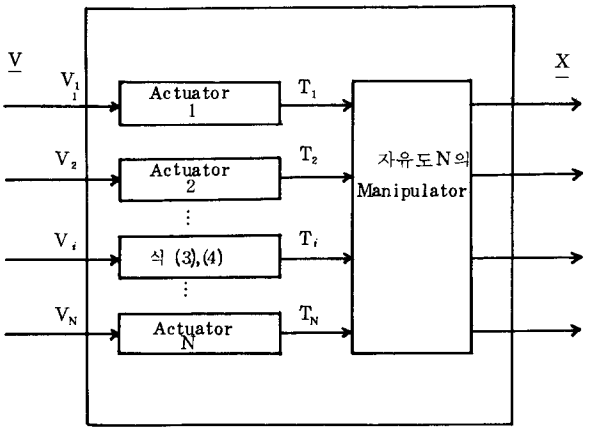

그림 2. 결합모델의 블럭선도

4. 궤환 선형 디커플링변환 (FLDT)

로보트 팔에 대한 동적모델은 접합점간에 결합이 있고 비선형적이기 때문에 그러한 문제를 해결해주는 방법이 요구된다. 이러한 목적에서 궤환 선형 디커플링변환이 필요하다. 여기서는 자유도 N인 manipulator시스템이 선형적이고, 또한 N개의 subsystem으로 분해되도록 궤환선형 디커플링변환을 유도한다. 이때 각각의 subsystem은 1 자유도를 나타내며, 3개의 적분요소로 구성된다. 기존의 상태방적식 (8), (9), (10)식에서 상태변수를 바꾸어 주면

$$\underline{Y} = [\underline{X}_1, \underline{X}_2, \underline{g}(\underline{X}, t)]^T \quad (11)$$

새로운 상태변수로 상태방정식을 구하면,

$$\dot{\underline{Y}}_1 = \underline{Y}_2 \quad (12)$$

$$\dot{\underline{Y}}_2 = \underline{Y}_3 \quad (13)$$

$$\dot{\underline{Y}}_3 = \dot{\underline{g}}(\underline{X}, t) = \frac{d}{dt}[J^{-1}(\underline{X}_1, t)][C\underline{X}_3 - A\underline{X}_1 - B\underline{X}_2 - \underline{W}(\underline{X}_1, \underline{X}_2) - \underline{1}(\underline{X}_1, \underline{X}_2, t)] + J^{-1}(\underline{X}_1, t)[C\dot{\underline{X}}_3 - A\dot{\underline{X}}_1 - B\dot{\underline{X}}_2 - \dot{\underline{W}}(\underline{X}) - \dot{\underline{1}}(\underline{X}, t)] \quad (14)$$

(14)식은 입력벡터 $\underline{V}$를 포함하는 상태변수 식이며 3개의 적분요소로 된 형태를 얻기위해서 새로운 입력벡터를 다음과 같이 잡는다.

$$\dot{\underline{Y}}_3 = \underline{Z} \quad (15)$$

위 (15) 식에서 궤환변환 $\underline{V}(\underline{X},\underline{Z},t)$을 구하면

$$\underline{V}(\underline{X},\underline{Z},t) = LC^{-1}J(\underline{X}_1,t)\{\underline{Z} - \frac{d}{dt}[J^{-1}(\underline{X}_1,t)][C\underline{X}_3 - A\underline{X}_1 - B\underline{X}_2 - \underline{W}(\underline{X}_1,\underline{X}_2) - \underline{1}(\underline{X}_1,\underline{X}_2,t)]\} + LC^{-1}[A\underline{X}_2 + B\underline{g}(\underline{X},t) + \dot{\underline{W}}(\underline{X}) + \dot{\underline{1}}(\underline{X},t)] - L[F_1\underline{X}_2 + F_2\underline{X}_3] \quad (16)$$

새로운 상태변수 Y의 함수로 궤환 선형 디커플링 변환을 구하면,

$$\underline{V}(\underline{Y},\underline{Z},t) = LC^{-1}\{J(\underline{Y}_1,t)\underline{Z} + \dot{\underline{W}}(\underline{Y}) + \dot{\underline{1}}(\underline{Y},t) - F_2\underline{W}(\underline{Y}_1,\underline{Y}_2) - F_2\underline{1}(\underline{Y}_1,\underline{Y}_2,t) - F_2A\underline{Y}_1 + [A - CF_1 - F_2B]\underline{Y}_2 + [B - F_2J(\underline{Y}_1,t) + \dot{J}(\underline{Y}_1,\underline{Y}_2,t)]\underline{Y}_3\} \quad (17)$$

결과적으로 (8), (9), (10) 식으로 주어진 시스템에 (17) 식으로 주어진 궤환 선형 디커플링변환이 인가되었을때 아래와 같은 등가적인 시스템을 얻는다.

$$\begin{aligned}\dot{\underline{Y}}_1 &= \underline{Y}_2\\ \dot{\underline{Y}}_2 &= \underline{Y}_3\\ \dot{\underline{Y}}_3 &= \underline{Z}\end{aligned} \quad (18)$$

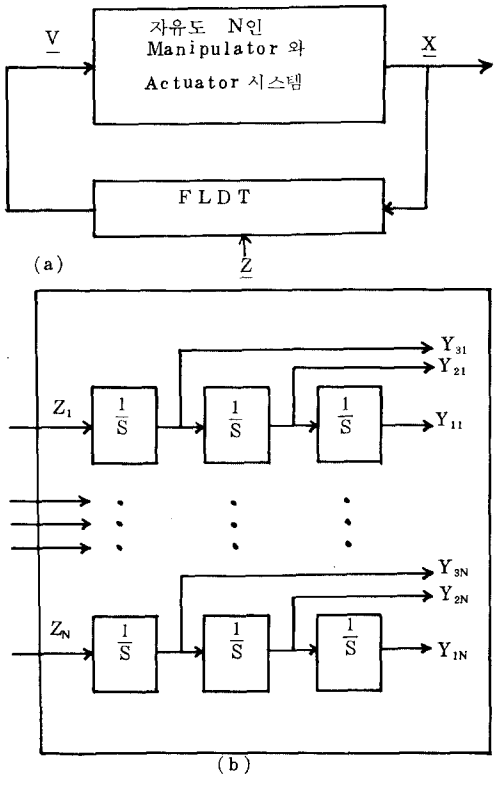

그림 3. (a) FLDT (b) 등가적인 시스템

5. 최소시간 위치 제어

궤환 선형 디커플링변환이 비선형적인 시스템에 인가되었을때, 시스템은 3개의 적분 요소로된 간단한 시스템으로 됨을 보았다. 여기에서는 그러한 시스템에서 최소시간 위치 제어에 필요한 제어입력을 구한다. 비선형 시스템에 FLDT를 도입하면 아래와 같은 시스템이 된다.

$$\begin{aligned}\dot{Y}_1 &= Y_2\\ \dot{Y}_2 &= Y_3\\ \dot{Y}_3 &= Z\end{aligned} \quad (19)$$

시스템

여기서, 제어입력 $|Z(t)| < \triangle$ 이며, 상태변수의 초기조건은

$$\begin{aligned}Y_1(0) &= -\zeta \quad (\zeta > 0)\\ Y_2(0) &= 0\\ Y_3(0) &= 0\end{aligned} \quad (20)$$

이때 최종조건이 $Y_1(tf) = 0$

$$Y_2(tf) = 0 \quad (21)$$

$Y_3(tf) = 0$ 으로 되도록 최소시간 tf와 최적입력 $Z^*(t)$을 구하는 문제이다. 시스템 A의 해는 아래의 F의 해[5]가 되며, 최적입력은 (23)식으로 된다.

$$F = X_1 + X_3^3/3 + \varepsilon X_2X_3 + \varepsilon(X_3^2/2 + \varepsilon X_2)^{3/2} \quad (22)$$

여기서, $\varepsilon = \mathrm{sgn}(X_2 + X_3/2)$

$$Z^* = -\triangle\,\mathrm{sgn}(F) \quad (23)$$

시스템 A의 최적입력은 아래와 같이된다.

$$Z^*(t) = \begin{cases}\triangle & 0 \leq t < tf/4\\ -\triangle & tf/4 \leq t < 3tf/4\\ \triangle & 3tf/4 \leq t \leq tf\end{cases} \quad (24)$$

여기서, $tf = 2(4\zeta/\triangle)^{1/3}$ (25)

가속도 Y_3, 속도 Y_2, 위치 Y_1은 제어 입력의 적분으로 구해질 수 있다.

$$Y_3(t) = \begin{cases}\triangle t & 0 \leq t < tf/4\\ \triangle(tf/2 - t) & tf/4 \leq t < 3tf/4\\ \triangle(t - tf) & 3tf/4 \leq t \leq tf\end{cases} \quad (26)$$

$$Y_2(t) = \begin{cases}\triangle t^2/2 & 0 \leq t < tf/4\\ \triangle tf^2/16 - \triangle(t - tf/2)/2 & tf/4 \leq t < 3tf/4\\ \triangle(t - tf^2)/2 & 3tf/4 \leq t \leq tf\end{cases} \quad (27)$$

$$Y_1(t) = \begin{cases}-\zeta + \triangle t^3/6 & 0 \leq t < tf/4\\ -\zeta + \triangle tf^3/192 - \triangle tf^2t/16 + \triangle tf\,t^2/4 - \triangle t^3/6 & tf/4 \leq t < 3tf/4\\ -\zeta - 26\triangle tf^3/192 + \triangle tf^2\,t/2 - \triangle tf\,t^2/2 + \triangle t^3/6 & 3tf/4 \leq t \leq tf\end{cases} \quad (28)$$

6. 시뮬레이션 결과

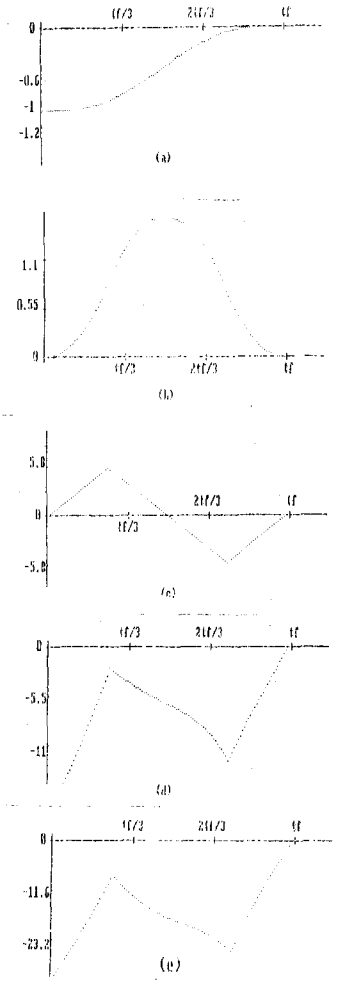

그림 4. 시뮬레이션 결과

(a) 연결봉의 위치 (b) 연결봉의 속도 (c) 연결봉의 가속도 (d) 전기자 전압 (e) 전기자 전류

그림 4.는 시뮬레이션 결과를 그린 것이며, 각각 연결봉의 위치, 속도, 가속도, 전기자 전압, 전류를 나타낸다. 이 결과는 manipulator의 자유도가 1인 경우이며, 제어입력의 boundary를 20 rad/s^3으로 했다. 연결봉의 위치, 속도, 가속도는 3개의 적분요소로 구성된 시스템의 경우이며, 전기자 전류, 전압은 비선형적 특성을 보인다.

7. 결 론

로보트 팔의 동적모델에 대한 상태방정식을 FLDT를 도입함으로써 선형적으로 해 줄 수 있다. FLDT도입후의 제어입력은 actuator의 입력 전압이 아니라, FLDT의 입력으로 된다.

본 논문에서는 이동작업에서의 FLDT 적용에 대해서 논하였으나, 추적작업에서의 FLDT 응용에 대해서는 더욱 연구할 필요가 있다.

참 고 문 헌

(1) Michael Brady, John M. Hollerbach, Timothy L. Johnson, Tomás Lozano-Pérez, Matthew T. Mason; Robot Motion, The MIT Press, 1982

(2) Chun-Shin Lin; Control and Computation for Mechanical Manipulator, Ph.D. thesis, Purdue University, August 1980

(3) A.K. Majumdar and A.K. Choudhury; On the Decoupling of Non-linear System, International Journal of control, 1972

(4) W.E. Snyder; Industrial Robots, Prentio-Hall, 1985

(5) F.W. Smith; Design of Quasi-Optimal Minimum Time Controllers, IEEE Trans. on Automatic Control, 1966