하계학술대회
논문86-5-11

월쉬함수에 의한 선형 스케일 시스템의 고찰

Considerations on the Linear Scaled Systems via Walsh functions

안 두 수 성균관대 전기과 교 수
심 재 선* 삼척공전대 전기과 부교수
이 명 규 성균관대 전기과 대학원

1. 서 론

일반적으로 애널로그 특성을 갖는 시스템의 해석이나 디자인을 위해 디지탈 컴퓨터가 이용되고 있다.

이 것은 시간에 대한 연속함수를 샘플 값으로 취하여 근접해 가는 방법으로 샘플러와 호울더를 도입하므로써 부분적으로 연속인 상수값(piece-wise constant)으로 처리한다.

이러한 시스템의 상태추정, 제어기, 관측자 설계등에 블록펄스(block-pulse)함수, 월쉬(Walsh)함수등과 같은 직교함수가 널리 응용되고 있다.<1~4> 직교함수의 응용방법은 그 함수들의 곱 매트릭스(product matrix), 적분 연산 매트릭스(integration operational matrix)등을 이용하여 간단한 대수 연립방정식으로 변환하므로써 효율적으로 이루어지고있다.<5~8>

본 연구에서는 먼저 스케일 시스템(scaled system)<9~10>의 해석과 동정(identification)을 위한 월쉬함수 접근 방법을 보이고자 하며, 연속 데이타 시스템(연속계)의 상태 방정식에 대응되는 이산 데이타 시스템(이산계)의 차등방정식이 월쉬 영역에서는 어떠한 관계를 갖는가에 대하여 연구하기로 한다.

2. 월쉬 함수

월쉬함수는 구간[0,1)에서 직교성을 갖는 구형파로 구성되는 complete set이며, 임의 함수 f(t)를 월쉬 함수로 전개하면 다음과 같다.< 7 >

$$f(t) = f_0 wal(0,t) + f_1 wal(1,t) + \ldots\ldots$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} f_i wal(i,t) \qquad (2.1)$$

$$f_i = \int_0^1 wal(i,t) f(t) dt \qquad (2.2)$$

월쉬함수의 적분은 다시 월쉬함수로 재표현된다. < 8 >

$$Ik(t) \triangleq \int_0^t wal(k,\tau) d\tau$$ 라 하고

$k = 2^m + k'$, $0 \le k' \le 2^m$ 으로 표시하면

$$Io(t) = 1/2\, wal(0,t) - 1/4 \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} wal(2^i, t)$$

$$Ik(t) = 2^{-(m+2)} \left\{ wal(k',t) - \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} wal(2^{m+i}+k, t) \right\}$$

$$k \ge 1 \qquad (2.3)$$

이된다.

이러한 관계를 매트릭스 형으로 표현하면 다음과 같다.< 7 >

$$\int_0^t wal(\tau)\, d\tau = P\, wal(t) \qquad (2.4)$$

$$\mathbf{wal}(t) = [\,wal(0,t), wal(1,t), \ldots\ldots]^T$$

여기서 P를 적분에 대한 월쉬 연산 매트릭스라하며, m항 전개시 다음과 같은 형태를 취한다.

$$P(m) = \left[\begin{array}{c|c} P(m/2) & -1/2mI(m/2) \\ \hline 1/2mI(m/2) & 0(m/2) \end{array}\right] \quad (2.5)$$

()안의 수는 매트릭스의 차수를 의미한다.

월쉬 함수를 이산월쉬함수(discrete Walsh function)로 고려하면 다음의 관계가 있다.

$$W = [\, wal(k,i) \,]$$

$$= [\, \mathbf{wal}(0), \mathbf{wal}(1), \ldots\ldots, \mathbf{wal}(m-1) \,] \quad (2.6)$$

$W(k,i)$는 k번째 월쉬 함수의 i번째 구간에서의 값이며, W를 월쉬 매트릭스라 한다.

또한 $\mathbf{wal}(k+j)$는 $\mathbf{wal}(k)$와 다음과 같은 관계를 갖는다. 즉 $\mathbf{wal}(k+j) = S^j\,\mathbf{wal}(k)$ (2.7)

여기서 S를 월쉬 이동 변환 매트릭스(shift transform matrix)라 한다.< 11 >

3. 스케일 시스템(scaled system)의 해석

다음으로 주어지는 스케일 시스템을 고려하자.

$$\dot{x}(t) = Ax(\lambda t) + Bu(t) \quad (3.1)$$

$$x(0) = 0 \quad , \quad 0 \le \lambda < 1$$

식(3.1)을 양변에 적분을 취하면

$$x(t) = A\int_0^t x(\lambda\tau)d\tau + B\int_0^t u(\tau)d\tau \quad (3.2)$$

로 되고 $x(t) = x_0\,\mathbf{wal}(t)$

$x(\lambda t) = x_1\,\mathbf{wal}(t)$

$u(t) = u_0\,\mathbf{wal}(t)$ 의 관계를

식(3.2)에 도입하면 다음과 같다.

$$x_0\mathbf{wal}(t) = Ax_1P\,\mathbf{wal}(t) + Bu_0P\,\mathbf{wal}(t)$$

즉, $x_0 = Ax_1P + B\,u_0P$ (3.3)

또한 식(3.2)에서

$$x(\lambda t) = \lambda A\int_0^t x(\lambda^2\tau)d\tau + \lambda B\int_0^t u(\lambda\tau)d\tau \quad (3.4)$$

가 된다.

$x(\lambda^n t) = x_n\mathbf{wal}(t)$

$u(\lambda^n t) = u_n\mathbf{wal}(t)$라고 하면 식(3.4)는

$$x_1 = \lambda Ax_2\,P + \lambda B\,u_1P \quad (3.5)$$

가 되며 일반 형태로 다음과 같이 된다.

$$x_n = \lambda^n Ax_{n+1}P + \lambda^n B\,u_nP \quad (3.6)$$

식(3.6)을 반복적으로 식(3.3)에 대입하자.

$$x_0 = \lim_{n\to\infty}[\lambda^{n(n-1)/2}A^n x_nP^n + \sum_{i=0}^{n}\lambda^{i(i-1)/2}A^{i-1}Bu_{i-1}P\,] \quad (3.7)$$

$\lim_{n\to\infty} x(\lambda^n t) = x(0)$ 이므로 $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$임을 알수있다.

결국 식(3.7)은 다음과 같다.

$$x_0 = \sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i(i-1)/2}A^{i-1}Bu_{i-1}P \quad (3.8)$$

여기서 Rao가 정의한 OSOMRI(one-shot operational matrices for repeated integration)를 도입하면 반복적분에 대한 오차를 줄일수 있다.< 8 >

$$x(t) = x_0\mathbf{wal}(t)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i(i-1)/2}A^{i-1}Bu_{i-1}P_i\,\mathbf{wal}(t) \quad (3.9)$$

Example 1.

W-L Chen< 12 >이 고려한 다음의 예를 보자.

$$\dot{x}(t) = 3x(1/16t) + 2u(t)$$

$$x(0) = 0$$

u(t)를 단위 계단함수라 하면 식(3.9)에 의해

$x(t) = x_0\mathbf{wal}(t)$

$= \sum_{i=1}^{\infty}(1/16)^{i(i-1)/2}\,3^{i-1} * 2 * u_{i-1}P_i\,\mathbf{wal}(t)$가 되며 3항 까지 고려하면

$x_0 = (1/16)^3 * 3^2 * 2 * u_2P_3 + 1/16 * 3 * 2$
$* u_1P_2 + 2 * u_0P$ 이다.

또한 월쉬 함수로 4개 항까지 전개 시켰다고 하면

$u_i = [1,0,0,0]$, $(i = 0,1,2)$ 이므로

$x_0 = [1.06268, -.547035, -.273526, .0117874]$

임을 알수 있다. 이에 대한 원함수와의 오차비교는 표와 같다.

표1 예 1의 해

	블록펄스함수		월쉬함수	
x (t)	x(k)	오차	x(k)	오차
.25293	.255868	2.937E-03	.25391	9.782E-04
.77641	.779357	2.951E-03	.77739	9.810E-04
1.32342	1.326387	2.967E-03	1.32441	9.839E-04
1.89405	1.897025	2.975E-03	1.89503	9.868E-04

4. 이산계에서 월쉬함수의 응용

연속계에서 식(4.1)로 표현되는 시스템은 이산계에서는 식(4.2)와 같은 차등방정식으로 변환된다.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{4.1}$$

$$x[(k+1)T] = \hat{A}x[kT] + \hat{B}u[kT] \tag{4.2}$$

$$[\hat{A} : \hat{B}] = [\ EXP(AT) : \int_0^T EXP[A(T-\tau)Bd\tau]$$

월쉬 영역에서는 식(4.1)과 식(4.2)의 관계가 어떻게 표현되는가를 보도록 한다.

$$x(t) \triangleq x\ wal(t) = \begin{bmatrix} x_1^T \\ \vdots \\ x_n^T \end{bmatrix} wal(t),\quad u(t) \triangleq u\ wal(t)$$

라 하고 식(4.1)을 적분 방정식으로 변환하고 월쉬 함수를 도입하면 다음과 같다.

$$x\ wal(t) = AxP\ wal(t) + x_0 wal(t) + BuP\ wal(t) \tag{4.3}$$

즉, $$x = AxP + x_0 + BuP \tag{4.4}$$

$$x_0 = [x(0), 0, 0, \ldots\ldots, 0]$$

여기서 X는 다음 식으로 구해진다.

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = [I - P^T \otimes A]^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + [I - P^T \otimes A]^{-1} P^T \otimes B \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

식(4.5)에서 X가 결정되므로 식(4.1)에 대한 해 x(t)는 m개의 세부구간에서 부분적으로 연속인 값으로 얻어진다.

그러나 x(t)에 대한 월쉬 함수 표현식으로 식(4.2)의 관계가 설명되는 것은 아니므로 다음의 과정이 필요하다.

식(4.1)을 λ로 스케일링하면

$$\dot{x}(\lambda t) = \lambda Ax(\lambda t) + \lambda Bu(\lambda t) \tag{4.6}$$

이 되며, 월쉬 함수를 도입하면

$$z\,wal(t) = \lambda AzP\,wal(t) + z_0 wAl(t) + \lambda BvP\,wal(t) \tag{4.7}$$

이 된다. 단, $x(\lambda t) = z\ wal(t)$

$u(\lambda t) = v\ wal(t)$ 이다.

따라서 $$z = \lambda AzP + z_0 + \lambda BvP \tag{4.8}$$

임을 알 수 있다. 또한

$$wal(t) = [wal(0),\ wal(1), \ldots\ldots,\ wal(m-1)] \tag{4.9}$$

이므로 $x[kT] = z\,wal(k)$인 관계가 있다. 그러므로

$$z_{k+1} = \hat{A}z_k + \hat{B}v_k \tag{4.10}$$

이고 다음과 같이 $[\hat{A}\ \hat{B}]$가 결정된다.

$$[\hat{A}\ \hat{B}] = \hat{z}\ [\tilde{z}^T \tilde{v}^T] \left[\begin{bmatrix} \tilde{z} \\ \tilde{v} \end{bmatrix} [\tilde{z}^T \tilde{v}^T] \right]^{-1} \tag{4.11}$$

$$\hat{z} = [z_{m-1}, \ldots\ldots, z_1],\ \tilde{z} = [z_{m-2}, \ldots\ldots,\ z_0]$$

월쉬 함수는 [0,1)에서 정의 되고 월쉬 함수 전개를 m항으로 고려하면 세부구간은 $1/m(1/2^k)$이 되므로 일반적인 샘플링 구간과는 다르다. 그러므로 $1/m$과 샘플링구간과 같게 해주기 위하여 스케일링을 하여야 하는데 $\lambda/m = T$에서 스케일링 상수를 알 수 있다.

Example 2.

다음의 2차계를 고려하자.

$$\dot{x}(t) = AX(t) + Bu(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\quad x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

샘플링 구간을 T=0.125라고 하면

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0.986193 & 0.103696 \\ -0.207392 & 0.675105 \end{bmatrix},\quad \hat{B} = \begin{bmatrix} 6.90349E-03 \\ 0.103696 \end{bmatrix}$$

월쉬 함수를 m = 8항으로 고려하면 λ = 1이며 그

때의 본 연구에 의하여 구한 $\hat{A}\ \hat{B}$ 값은 다음과같다.

$$\tilde{A}_w = \begin{bmatrix} 0.986923 & 0.104578 \\ -0.209148 & 0.673199 \end{bmatrix},\quad \tilde{B}_w = \begin{bmatrix} 6.53553E-03 \\ 0.104575 \end{bmatrix}$$

이에 대한 최소자승오차는 그림과같다.

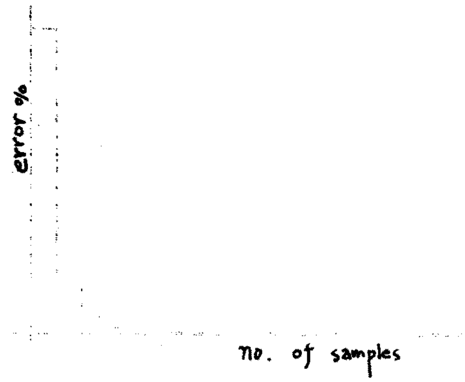

그림1. $x_1(k)$에 대한 오차비교

5. 결 론

본 연구에서는 선형 스케일 시스템의 해석과 파라메타의 동정을 위해 월쉬함수를 응용하였다.
직교성을 갖는 월쉬함수의 적분연산 매트릭스를 이용하면, 간단한 대수방정식으로 변환 되어 선형 스케일 시스템의 해석을 간편하게 할 수 있었다.
또한 연속계의 월쉬함수를 도입하였을때 그 시스템의 응답을 근거로 이산계에 대응되는 차등방정식을 얻는 방법을 보였다.
월쉬함수의 세부구간과 일반적인 샘플링 구간은 서로 다를 수있지만 이와 같은 문제는 먼저시스템을 스케일링 하므로써 해결할 수 있었다.

REFERENCE

1) P.N. Paraskevopoulos:"Analysis of singular systems using orthogonal fuctions ", IEE Proc., v-131 pt.D pp.37~38.1984
2) N.K. Sinha:"Some system theory applications of block-pulse functions", Can.Elec.J. vol. 10, pp 3~7. 1985
3) W.L. Chen:" Analysis of sampled data systems by block pulse functions", Int.J.Syst. Sci. vol.16, pp.745~752.1985
4) R.E. King:" Parametric identification of discrete time SISO systems", Int. J. Cont. vol.30,pp.1023~1029,1979
5) V.R. Karanam:"Bilinear system identification by Walsh functions",IEEE Trans. Auto. Con. vol.23 , pp.709~713. 1978
6) W.L. Chen: "Analysis and optimization of time-varing linear systems via Walsh functions", Int.J.Con. vol.27,pp.917~932.1978
7) C.F. Chen:"Time-domain systhsis via Walsh functions",Proc. IEE vol.122, pp.565~570,
8) G.P. Rao;" Improved algorithems for parameter identification in continuous systems via Walsh functions",IEE Proc. D, vol.130, pp.9~16,1983
9) J.H. Chou;" Chebyshev series analysis and identification of scaled systems", Int. J. Syst. Sci., vol.16, pp.1157~1162, 1985
10) W.L.Chen;" Block pulse series analysis of scaled systems",Int.J.Syst.Sci.,vol.12,pp. 885~891,1981
11) I.R.Horng;" Discrete Walsh operational matrices for analysis and optimal control of linear digital control", Int. J. Con., vol 42,pp.1443~1455, 1985