

## IIR 디지털 필터의 양자화 잡음 및 Round-off error의 감소에 관한 연구

\*방 성 일, 진 년 감  
단국대학교 공과대학 전자공학과

### A Study on the Reduction of Quantization Noise and Round-off errors in IIR Digital Filter

Sung Ill Bang, Yeon Kang Chin  
Dept. of Electronics Eng., Dankook Univ.

**\* ABSTRACT \***

This paper represents a method which can be realized a class of new structure for the IIR digital filter with poles near the unit circle. The realization is achieved by introducing a new technique of delay replacement scheme in the standard in the digital filter structures, which results in very low multiplier coefficient sensitivity and low round-off errors.

**1. 서 론**

일반적으로 디지털 필터를 컴퓨터나 특수한 하드웨어를 이용하여 실현하는데 있어서 시스템 계수의 word-length는 필터의 가격 및 처리속도에 큰 영향을 미친다. 만약 word-length를 충분히 크게 하면 가격은 상승되고 처리속도 또한 늦어지므로 word-length를 줄이는 것은 매우 중요한 일이다. 하지만, 계수의 word-length를 줄이면 error가 발생한다. 이 error는 양자화 잡음과 연산과정에 있어서의 round-off error로 분류할 수 있다. 전자는 계수들의 감도로써 평가되고 후자는 시스템 출력에서의 신호대잡음비(S/N비)로써 평가된다. 이들 error는 시스템을 실현하는 구조에 따라 크게 좌우되며, 계수의 양자화 효과가 필터의 안정성에도 많은 영향을 끼치므로 가장 기본적인 2차 direct form을 변형하여 error를 개선한 논문이 다수 발표되었다[1]~[4]. 본 논문에서는 Z-평면상의 원점을 시스템의 극점으로 옮기는 필터의 구조를 변형시켜 컴퓨터로 simulation하였으며 다른 방법[1]~[3]들과 계수들에 대한 감도를 비교 고찰하였다. 또, 시스템 출력에서의 round-off error를 이론적으로 해석하여 simulation한 결과와 비교 검토하였다.

**2. Digital filter의 구조**

일반적으로 IIR Digital filter를 실현하는데 가장 많이 쓰이는 형태는 2차 direct form인 종속형과 병렬형이다. 2차 all-pole 전달함수를 갖는 디지털 필터는 다음과 같다.

$$H(z) = \frac{1}{z^2 - a_1z + a_2} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{여기서, } a_1 &= 2r \cos\theta \\ a_2 &= r^2 \end{aligned} \quad (2)$$

(1)식과 같은 전달함수를 갖는 시스템의 극점을 Z-평면 상에 표시하면 그림-1과 같이 되며 이때 계수의 감도 및 round-off error는  $1/(\delta \sin\theta)$ 에 비례한다 [1]~[4].

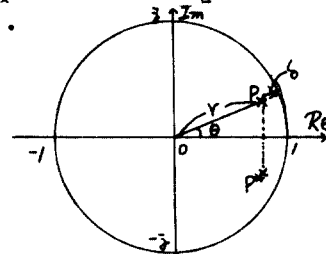


그림-1 Z-평면 상의 2차 필터의 극점의 위치

$\delta$ 와  $\theta$ 의 값이 작은 경우엔 감도 및 round-off error를 개선하기 위해 Z-평면 상의 원점을 극점의 위치로 옮기면 Z-평면과 Z'-평면 사이에는 다음과 같은 관계식이 성립한다.

$$z' = \frac{mz}{z - m} \quad (3)$$

여기서,  $m=r$  극점이 새로운 Z'-평면의 극점이 된다. (3)식을 등가적으로 실현하면 그림-2와 같이 되고, 2차 direct form의 모든 delay 요소를 그림-2로 대체시키고 delay-free loop를 피하기 위하여 최소의 delay 요소를 첨가시키면 시스템은 실제적으로 그림-3과 같이 실현된다.

그림-3은 새로운 승산기 계수  $\hat{a}_1$  과  $\hat{a}_2$ 를 갖게되고

전달함수는 다음과 같다.

$$H(z) = \hat{H}(z) = \frac{1}{1 - \hat{a}_1 z^{-1} + \hat{a}_2 z^{-2}} \quad (4)$$

여기서,  $\hat{a}_1 = 2m + a_1 m + a_2 m^2$   
 $\hat{a}_2 = (1 + a_1) m^2$  (5)

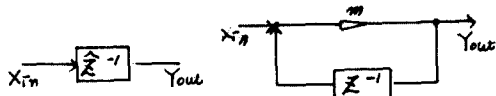


그림-2 2~블럭의 동가적 실현

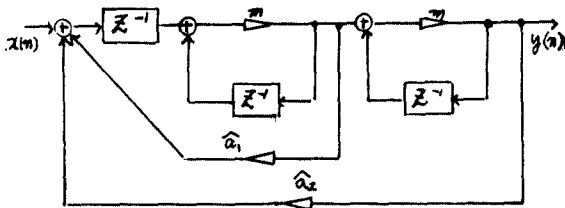


그림-3 새로 변형된 시스템의 구성

### 3. 계수의 양자화에 의한 감도의 고찰

디지털 필터를 실제적으로 실현 하고자 할 때 한정된 word-length 에 의해 시스템 계수들을 양자화 하여야 한다. 이러한 양자화의 결과는 극점의 위치를 본래의 설계된 위치에서 새로운 위치로 이동시키게 되며 송산기 계수  $\{a_i\}$  에 대한 전달함수 크기의 감도는 다음과 같이 정의된다 [3] .

$$S_{a_i}^H(z) = \text{Re} \left\{ \frac{a_i}{H(z)} \cdot \frac{\partial H(z)}{\partial a_i} \right\} \quad (6)$$

$|H(z)|$ 는 전달함수의 크기를 나타내며 (1) 식으로 부터 다음과 같이 표현된다.

$$|H(z)| = \frac{1}{(1+r^2)^2 + 4r^2 \cos^2 \theta - 4r(1+r^2) \cos \theta \cos \omega + 4r^2 \cos^2 \omega} \quad (7)$$

새로운 방법에 대한 시스템 계수들의 감도를 표현하면 다음과 같다.

$$S_{\hat{a}_1}^H(z) = \hat{a}_1 |H(z)| \cdot \left\{ -\hat{a}_1 - 2m\hat{a}_2 - 2m - m^2\hat{a}_1 + (1+2m\hat{a}_1 + \hat{a}_2 + m^2\hat{a}_2) \cos \omega - (4m+2m^2\hat{a}_1) \cos^2 \omega + 4m^2 \cos^2 \omega \right\} \quad (8)$$

$$S_{\hat{a}_2}^H(z) = \hat{a}_2 |H(z)| \cdot \left\{ 1 - \hat{a}_2 - \hat{a}_2 m^2 - m^2 + 2m\hat{a}_1 + (\hat{a}_1 + 2m\hat{a}_2 - 6m - 3\hat{a}_1 m) \cos \omega - (2+4\hat{a}_1 - 2\hat{a}_2 m^2 - 9m^2) \cos^2 \omega + 4(2m + \hat{a}_1 m^2) \cos^3 \omega - 8m^2 \cos^4 \omega \right\} \quad (9)$$

여기서,  $\hat{a}_1 = 2m + a_1 m + a_2 m^2$   
 $\hat{a}_2 = m^2 (1 + a_1)$  (10)

새로운 방법에 의한 감도의 최대값은 근사적으로

다음과 같이 구할 수 있다.

새로운 2-평면에서 좌표축의 원점인 m을 기준으로 하여  $\theta$  가 작으면  $\theta = \sin \theta$  가 되므로  $\delta$  와  $\theta$  가 작은 값을 갖고  $\theta = \sin \theta$  인 경우에 새로운 계수  $\hat{a}_1$  과  $\hat{a}_2$  를 근사화 시키면 다음과 같다.

$$\hat{a}_1 \approx 5 - \theta^2 \quad (11)$$

$$\hat{a}_2 \approx 3 - \theta^2 \quad (12)$$

(11) 과, (12) 식을 (9), (10) 식에 대입하면 최대감도는 근사적으로 다음과 같다.

$$S_{\hat{a}_1}^H(z) \approx \frac{1}{4} \quad (13)$$

$$S_{\hat{a}_2}^H(z) \approx \frac{1}{8} \quad (14)$$

따라서, 여러가지 방법에 대해 작은 값의  $\delta$  와  $\theta$  에 대해 최대감도의 근사값은 표-1에 나타난 것과 같다.

표-1 작은 값의  $\delta$  와  $\theta$  에 대한 최대감도의 근사값

	$\theta \gg \delta$	$\theta \approx \delta$	$\theta \ll \delta$
Direct form	$S_{a_1}^H \approx \frac{1}{4\theta}$ $S_{a_2}^H \approx \frac{1}{4\theta^2}$	$S_{a_1}^H \approx \frac{1}{\delta^2}$ $S_{a_2}^H \approx \frac{1}{2\delta^2}$	$S_{a_1}^H \approx \frac{2}{\delta}$ $S_{a_2}^H \approx \frac{1}{\delta}$
Agarwal과 Bumsu의 방법	$S_{b_1}^H \approx 1$ $S_{b_2}^H \approx \frac{\theta}{4\delta}$	$S_{b_1}^H \approx 1$ $S_{b_2}^H \approx 1$	$S_{b_1}^H \approx 1$ $S_{b_2}^H \approx 1$
Nishimura Hirano와 Pal의 방법	$S_{a_1}^H \approx \frac{3}{8}$ $S_{a_2}^H \approx \frac{1}{4}$	$S_{a_1}^H \approx \frac{3\delta}{16}$ $S_{a_2}^H \approx \frac{\delta}{8}$	$S_{a_1}^H \approx \frac{3}{8}$ $S_{a_2}^H \approx \frac{1}{8}$
새로운 방법	$S_{a_1}^H \approx \frac{1}{8}$ $S_{a_2}^H \approx \frac{1}{4}$	$S_{a_1}^H \approx \frac{3\delta}{8}$ $S_{a_2}^H \approx \frac{\delta}{2}$	$S_{a_1}^H \approx \frac{3}{8}$ $S_{a_2}^H \approx \frac{1}{8}$

### 4. Round-off error의 이론적 분석

협대역 저역 통과 디지털 필터를 실현할 경우 연산 과정에서 발생하는 모든 error를 도시하면 그림-4와 같이 된다.

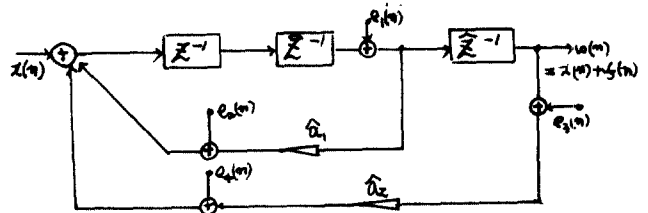


그림-4 IIR Digital filter의 양자화 잡음 및 Round-off error 모델

입력 및 모든 register length는  $(b+1)$  bit로 주어지고, error sequence  $e(n)$ 은 다음을 만족 한다고 가정하자 [6] .

- \* Error sequence  $e(n)$  은 입력  $x(n)$  및 출력  $y(n)$  에 un-correlate하다.
- \* Error sequence  $e(n)$  은 하나의 양자화 간격에 대해 균일한 분포를 갖는다.
- \* Error sequence  $e(n)$  은 white-noise sequence이다.

Rounding 에 의해 양자화가 이루어지면 error sequence의 범위는  $-\frac{1}{2}q < e(n) \leq \frac{1}{2}q$  ( $q$ 는 양자화 스텝의 크기)이며 error sequence  $e(n)$ 의 variance는

다음과 같다.

$$\sigma_e^2 \cong E\{e - m_e\}^2 = \frac{1}{12} \cdot q^2 \quad (15)$$

또한,  $h_e(n)$ 이 시스템의 unit sample response라고 하면 error sequence  $e(n)$ 의 출력잡음 variance는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\sigma_y^2 = \sigma_e^2 \cdot H_{ER}^2 \quad (16)$$

$$\text{여기서, } H_{ER}^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_e^2(n) \quad (17)$$

그림-4에서 각각의 Z변력으로부터 나온 sequence는 계수  $\hat{a}_1$ 과  $\hat{a}_2$ 가 곱해지기 전에 scaling 해야 하므로 이로 인해  $e_1(n)$ 과  $e_2(n)$ 이 발생한다. 입력으로 부터 중간상태변수  $v_1(n)$ 까지의 전달함수  $H_1(z)$ 의 최단값을  $H_{1P}$ 라 하고 근사화 시키면 다음과 같다.

$$H_1(z) = \frac{m(z-m)}{z^2 - \hat{a}_1 z + \hat{a}_2} \quad (18)$$

$$|H(e^{j\omega})|^2 = \frac{m^2(1-zm \cos \omega + m^2)}{1 + \hat{a}_1^2 + \hat{a}_2^2 - 2\hat{a}_1(1+m)\cos \omega + 4\hat{a}_2 \cos^2 \omega} \quad (19)$$

$$H_{1P} \approx \frac{1}{2\delta} \quad (20)$$

따라서, 시스템의 중간상태 출력 noise의 variance는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$H_2(z) = \frac{m(z^2 - mz)}{z^2 - \hat{a}_1 z + \hat{a}_2} \quad (21)$$

$$h_2(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_2(z) z^{n-1} dz \quad (22)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{m(n+1)\theta - \sin n\theta\} \cdot u(n) \quad (23)$$

$$H_{2R}^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_2^2(n) \approx \frac{1}{4\delta} \quad (24)$$

그러므로,

$$\sigma_{y1}^2 = \sigma_{e1}^2 \cdot H_{2R}^2 \approx \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{16\delta^2} \cdot q^2 \quad (25)$$

동일한 방법으로  $e_2(n)$ 의 출력잡음 variance를 구하면 다음과 같다.

$$\sigma_{y3}^2 \cong \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{16\delta^2} \cdot q^2 \quad (26)$$

또한,  $w_1(n)$ 과  $\hat{a}_1$ ,  $w(n)$ 과  $\hat{a}_2$ 의 곱은 register length에 맞도록 rounding되어 이한다. 이로 인해 발생하는 error sequence  $e_3(n)$ 과  $e_4(n)$ 은  $\pm \frac{1}{2}q$  사이에서 놓이게 되고 이들 출력잡음의 variance는 다음과 같다.

$$\sigma_{y2}^2 = \sigma_{y4}^2 \cong \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{4\delta^2} \cdot q^2 \quad (27)$$

그러므로, 시스템 출력에서의 noise variance는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\sigma_y^2 = \sigma_{y1}^2 + \sigma_{y2}^2 + \sigma_{y3}^2 + \sigma_{y4}^2 \quad (28)$$

$$\approx \frac{1}{12} \cdot \left( \frac{1}{8\delta^2} + \frac{1}{2\delta^2} \right) \cdot q^2 \quad (29)$$

입력 sequence  $x(n)$ 이  $x(n) = \sin n\omega T$ 라고 한다면

정현파 입력 sequence에 대한 시스템 출력 sequence의 variance는 다음과 같다.

$$\sigma_y^2 = \sigma_x^2 \cdot H_p^2 \approx \frac{1}{8\delta^2} \quad (30)$$

그러므로, 시스템 출력에서의 신호대잡음비(S/N비)는 다음과 같이 구해진다.

$$S/N = \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} = \frac{1}{8\delta^2(\theta^2 + 4\delta^2)} \quad (31)$$

같은 방법으로  $\delta \gg \theta$  및  $\delta \ll \theta$ 에 대해 근사적으로 S/N비를 구하여 표-2에 수록하여 놓았다.

표-2 시스템 출력에서의 신호대잡음비(S/N비)

	$\theta \gg \delta$	$\theta \approx \delta$	$\theta \ll \delta$
Direct form	$\frac{1}{q^2} \cdot \left( \frac{24\delta^2}{16\delta^2 + 1} \right)$	$\frac{1}{q^2} \cdot \left( \frac{4\delta^2}{16\delta^2 + 1} \right)$	$\frac{1}{q^2} \cdot \left( \frac{24\delta^3}{16\delta^2 + 1} \right)$
Agarwal과 Burnasov의 방법	$\frac{1}{q^2} \cdot \left( \frac{12\delta}{4\delta^2 + \theta^2} \right)$	$\frac{1}{q^2} \cdot \left( \frac{2}{\delta} \right)$	$\frac{1}{q^2} \cdot \left( \frac{12}{5\delta} \right)$
Nishimura Hirano 및 Pal의 방법	$\frac{1}{q^2} \cdot \left( \frac{12\delta}{4\delta^2 + \theta^2} \right)$	$\frac{1}{q^2} \cdot \left( \frac{6\theta}{24\delta} \right)$	$\frac{1}{q^2} \cdot \left( \frac{3}{\delta} \right)$
새로운 방법	$\frac{1}{q^2} \cdot \left( \frac{12\delta}{4\delta^2 + \theta^2} \right)$	$\frac{1}{q^2} \cdot \left( \frac{4\theta}{16 + 5} \right)$	$\frac{1}{q^2} \cdot \left( \frac{4}{\delta} \right)$

### 5. Simulation 결과 및 검토

앞에서 이론적으로 해석한 내용을 실제적으로 검토하기 위하여 다음과 같은 전달함수를 simulation해보자.

$$H(z) = \frac{1}{z^2 - 1.87113473z + 0.9025} \quad (32)$$

(32)식과 같은 전달함수의 magnitude에 대한 주파수 응답은 그림-5와 같이 저역통과 특성을 갖는 디지털 필터이며, 대역폭은 약 0.2659 (rad/sec)이고 magnitude가 최대가 되는 주파수는 약 0.1658 (rad/sec)이고, 이때 magnitude는 약 59.1051146이다.

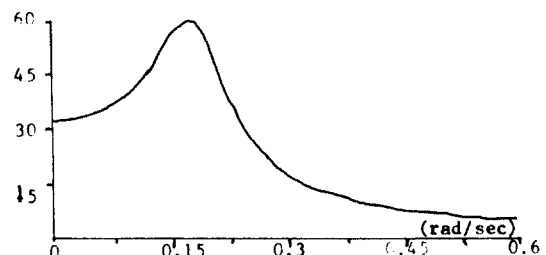


그림-5 2차 시스템의 주파수 응답

Z-평면에서 극점에서 단위원까지의 거리인  $\delta$ 는 약 0.04999이며 극점의 위상각,  $\theta = 0.17453$ (rad)이므로 극점은 단위원인  $Z = 1$  가까이 위치하고 있다.

그림-6은 (32)식으로 주어지는 전달함수의 감도를 2차 direct form으로 나타낸 것이고, 그림-7은

Agarwal과 Burrus 방법, Nishimura Hirano 및 Pal의 방법, 새로운 방법에 의한 감도의 각주파수에 따른 응답을 나타낸 것이다.

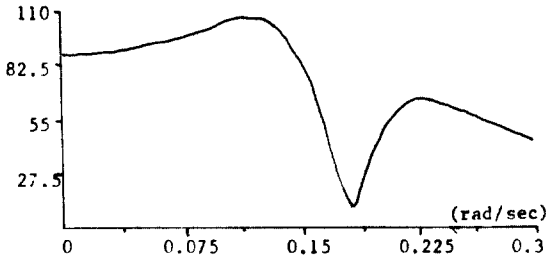


그림-6 2차 direct form의 감도의 각주파수 응답

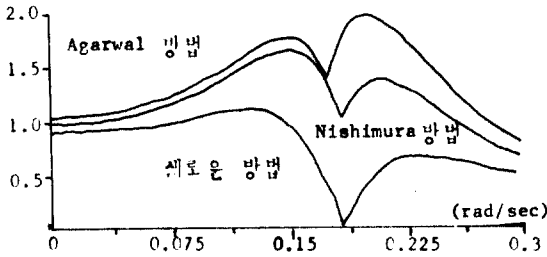


그림-7 여러 방법에 대한 감도의 각주파수 응답

그림-7에서 알 수 있듯이 본 논문에서 제시한 새로운 방법에 의해 필터를 실현할 경우 앞의 다른 방법에 비해 감도가 더 작아짐을 알 수 있다.

(32)식의 전달함수를 갖는 지역통과 디지털 필터의 입력은 8 bit 정현파 sequence이고 모든 연산도 8 bit로 이루어진다. 그리고, scaling 해주므로써 계환의 loop 및 전체 전달함수가 변하므로  $\hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2$  와 실질적인 출력은 조정되어야 한다. 계수들은  $\hat{\omega}_1 \cdot 2^a$  과  $\hat{\omega}_2 \cdot 2^b$ 로 대체시켜 주었다.

이외같이 (32)식을 simulation한 결과 S/N비는 전달함수의 크기가 최대가 되는 주파수에서 2차 direct form은  $S/N비 = 6.5 \times 10^4$ 이고 새로운 방법은  $S/N비 = 1.2 \times 10^5$ 이 되었다. 주파수에 따른 S/N비의 변화는 그림-8과 같다.

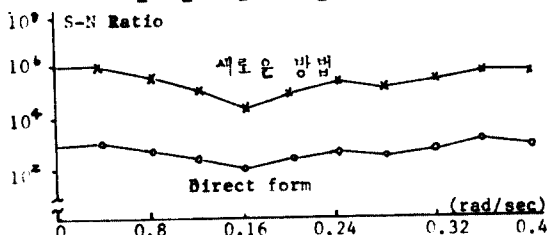


그림-8 각주파수에 따른 S/N비의 변화

그림-9에서 알 수 있듯이 전달함수의 크기가 최대가 되는 주파수에서 S/N비가 최소가 됨을 알 수 있다. 결과적으로 필터를 새로운 방법으로 실현하면 direct form보다 월등히 좋아지는 것을 알 수 있다.

### 6. 결 론

본 논문에서는 극점이 단위원 가까이에 위치하는 지역통과 2차 디지털 필터에 대해 고찰하여 보았다. 이 경우 direct form으로 실현할 경우 작은 감도와  $\omega$ 와  $\theta$ 에 대해 감도 및 round-off error는 심각한 문제가 되는 데 이를 개선하기 위하여 Z-평면의 원점을 시스템의 극점으로 옮겨 필터의 구조를 변경시켜 이론적으로 해석하여 보았으며 구체적인 예를 들어 컴퓨터로 simulation하여 이론치와 비교 검토 하였다.

Simulation결과 새로운 방법으로 디지털 필터를 실현하면 2차 direct form으로 실현하는 경우에 비해 인자화 잡음 및 round-off error가 상당히 작아지는 것을 알 수 있다. 따라서, 이 방법으로 필터를 구성하면 설계 하고자 하는 필터의 특성에 매우 가까운 특성을 갖는다.

### \* 참고 문헌 \*

- 1 "Selected paper in Digital Signal Processing, II" D.S.P. Committee. IEEE-ASSP Society, ed. New York IEEE press, 1976
- 2 R.C. Agarwal and Burrus "New recursive digital filter structure having very low sensitivity and round-off noise" IEEE Trans. circuit syst. Vol. CAS-22 pp. 921 - 927. Dec. 1975
- 3 Nishimura, K.Hirano and Pal "A new class of very low sensitivity and low round-off noise recursive digital filter structure" IEEE Trans. Circuit and System Vol. CAS-28, No.12, pp 1152 - 1158 Dec. 1981
- 4 J.Szczupak and S.K. Mitra "On digital filter structure with low sensitivity" Proc. IEEE. Vol. 66 No.9 pp 1082 - 1083 Sep. 1978
- 5 C.M. Rader and B.Gold "Effect of parameter quantization on the poles of a digital filter" Proc. IEEE Vol.55 pp 688 - 689 May 1967
- 6 A.V.Oppenheim and R.W. Schaffer "Digital Signal Processing" Englewood Cliff, N.J. prentice-Hall 1975