

반복법에 의한 2차원 디지털 필터의 구현에 관한 연구

이 호 용, 강 철 호
 광운대학 전자통신공학과

A Study on the Implementation of 2-D Digital Filter by Iterative Method

Ho Oong Lee, Chul Ho Kang

Dept. of Electronic Communication Eng., Kwangwoon University

A B S T R A C T

A 2 - D Digital filter can be implemented by an iterative computation involving only FIR filtering operations, provided a certain convergence criterion is met. In practice, as the number of iteration is finite, the frequency response implemented by iterative computation is an approximation to the desired rational frequency response. In this paper, 1-D prototype low - pass filter is transformed 2-D Low-pass filter by applying a McClellan transformation, and 2-D rational frequency responses using frequency transformation are implemented by iterative computation algorithms of 2-D Low-pass, High-pass, Band-pass, Band-reject filter.

1. 서 론

2차원 디지털 필터의 반복구현은 피드백(feed-back)와 같은 이론으로 서술되며, 2차원 주파수 응답은 유한한 크기 임펄스 응답(FIR) 필터링을 사용한 반복 계산 형태로 구현될 수 있다. 2차원 주파수 응답은 수렴조건이 만족하는 상황에서 반복 계산을 무한히 수행하면 이론적으로 구현될 수 있으나 실제 반복 계산은 횟수가 제한되기 때문에 실제로 구현되는 주파수 응답은 본래 구하고자 하는 주파수 응답의 근사치가 된다. 반복 계산법은 2차원 주파수 응답을 FIR 필터링의 sequence로 분해(Decomposition)함으로써 근사적으로 구현하기 위해 사용된다. 이 방법은 기존의 방식과는 전혀 다른 각도에서 처리한 것으로 noncausal한 2-D IIR 필터의 경우에도 인자분해(spectral factorization)⁽¹⁾나 부분분수 전개 등 복잡한 계산을 거치지 않고 반복적 알고리즘을 사용함으로써 구현이 가능하다. (2), (3) 기존의 방식에서는 low-pass 필터인 경우만 고려하였으나, 본 논문에서는 1차원 prototype low-pass 필터를 선정하여 McClellan 변환식을 적용시켜 2차원 필터로 변환한 후, 주어진 관계식을 이용하여 2차원 Low-pass, High-pass, Band-pass, Band-reject 필터로 주파수 변환시켜 반복 계산

알고리즘을 통하여 구현하였다.

2. 반복 구현을 위한 계산식 (2), (3)

2차원 주파수 응답은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$H(w_1, w_2) = \frac{A(w_1, w_2) \sum_{m_1, m_2} a(m_1, m_2) \exp(-jw_1 m_1 - jw_2 m_2)}{B(w_1, w_2) \sum_{n_1, n_2} b(n_1, n_2) \exp(-jw_1 n_1 - jw_2 n_2)} \quad (1)$$

여기서 array $a(m_1, m_2)$ 와 $b(n_1, n_2)$ 는 유한한 크기의 array이다.

새로운 다항식 $c(w_1, w_2)$ 는 다음과 같이 정의한다.

$$C(w_1, w_2) = 1 - B(w_1, w_2) \quad (2)$$

윗식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$H(w_1, w_2) = A(w_1, w_2) / (1 - C(w_1, w_2)) \quad (3)$$

만약 입력신호 $x(n_1, n_2)$ 의 스펙트럼을 $X(w_1, w_2)$, 출력신호 $y(n_1, n_2)$ 의 스펙트럼을 $Y(w_1, w_2)$ 라 정의하고, $X(w_1, w_2)$ 와 $Y(w_1, w_2)$ 가 유한하다고 가정하면

$$Y(w_1, w_2) = A(w_1, w_2) X(w_1, w_2) / (1 - C(w_1, w_2)) \quad (4)$$

또는

$$Y(w_1, w_2) = A(w_1, w_2) X(w_1, w_2) + C(w_1, w_2) Y(w_1, w_2) \quad (5)$$

반복 계산식에서 출력스펙트럼의 형태는 다음과 같다.

$$Y_{-1}(w_1, w_2) = 0$$

$$Y_i(w_1, w_2) = A(w_1, w_2) X(w_1, w_2) + C(w_1, w_2) Y_{i-1}(w_1, w_2) \quad (6)$$

수렴하기 위한 조건은 다음과 같다.

$$|C(w_1, w_2)| < 1 \quad (7)$$

그림1은 입력이 $x_1(n_1, n_2)$, 출력이 $y_1(n_1, n_2)$ 인 1차 캐환루프 구조된 반복 계산 모델이다. 여기서 STORE Operator 는 전단에서 반복 계산된 결과를 저장하는 1차원 디지털 필터에서 Z^{-1} 로 표시되는 1차원 shift operator 와 유사한 성질을 갖고 있다.

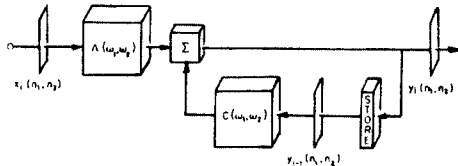


그림1. 반복구현을 위한 블록 다이어그램
Blockdiagram for iterative implementation

I 번 반복 계산 종료 후 발생한 spectral error 를 $Y_I(w_1, w_2)$ 와 $Y(w_1, w_2)$ 의 비로 1에 가깝게 접근시키기 위해서는 모든 주파수 (w_1, w_2) 에 대해 다음과 같은 제한조건이 필요하게 된다.

$$E(w_1, w_2) \triangleq \left| \frac{Y_I(w_1, w_2)}{Y(w_1, w_2)} - 1 \right| = |C(w_1, w_2)|^{I+1} < \epsilon \quad (8)$$

여기서 ϵ 는 임의의 작은 양의 상수이다.

I 번 반복 후 종료될 때 유호 주파수 응답은 다음 식으로 주어진다.

$$H_I(w_1, w_2) = A(w_1, w_2) \prod_{i=0}^I C^i(w_1, w_2) \quad (9)$$

반복 계산이 종료될 때 구현된 주파수 응답은 원하는 주파수 응답 $H(w_1, w_2)$ 의 FIR 근사치가 된다. 본 논문에 사용된 1차원 prototype low-pass 필터는 다음과 같다.

$$H(w) = A(w) / (1 - C(w)) \quad (10)$$

여기서

$$A(w) = a(0) + \sum_{m=1}^4 2a(m) \cos mw$$

$$C(w) = \sum_{n=1}^2 2C(n) \cos nw.$$

단,

$$a(0) = 0.50033 \quad 2c(1) = -0.0010153$$

$$2a(1) = 0.81561 \quad 2c(2) = -0.83047$$

$$2a(2) = 0.41543$$

$$2a(3) = 0.11311$$

$$2a(4) = -0.000037952$$

윗식을 사용하여 얻은 결과는 그림2에 나타내고 있다. 이때 $A(w)$ 와 $C(w)$ 의 계수를 입력 data로 하여 McClellan 변환을 이용하면 (3)식과 같은 2차원식을 얻을 수 있다.

3. 2차원 디지털 필터의 변환방법.

3.1 McClellan 변환. (4), (5)

1차원 필터의 주파수 응답 $H(w)$ 는 다음과 같다.

$$H(w) = h(0) + \sum_{n=1}^N h(n) (\exp(-jwn) + \exp(jwn))$$

$$= h(0) + \sum_{n=1}^N 2h(n) \cos wn$$

$$= \sum_{n=0}^N a(n) \cos wn \quad (11)$$

여기서 $a(n)$ 은 다음과 같이 정의된다.

$$a(n) \triangleq \begin{cases} h(0) & n=0 \\ 2h(n) & n>0 \end{cases} \quad (12)$$

한편 1차원 필터를 2차원 필터로 변환하는 McClellan 변환식은 다음과 같다.

$$H(w_1, w_2) = \sum_{n=0}^N a(n) (\cos w)^n \quad (13)$$

여기서

$$\cos w = \sum_{p=0}^P \sum_{q=0}^Q t(p, q) \cos^p w_1 \cos^q w_2 \quad (14)$$

윗식에서 2차원 필터의 주파수 응답은 다음과 같다.

$$H(w_1, w_2) = \sum_{n=0}^N a(n) \left(\sum_{p=0}^P \sum_{q=0}^Q t(p, q) \cos^p w_1 \cos^q w_2 \right)^n \quad (15)$$

단,

$$P=Q=1 \\ -t(0,0) = t(1,0) = t(0,1) = t(1,1) = 0.5 \quad (16)$$

3.2 2차원 디지털 필터의 주파수 변환. (6), (7)

3.2.1. 2차원 low-pass 필터
prototype low-pass 필터의 차단주파수 w_c 가 0.46π , 원하는 필터의 차단주파수를 w_u 를 0.2π 로 한다. 1차원 주파수 변환식은 다음과 같다.

$$z_1^{-1} \longrightarrow z_1^{-1} - \alpha / (1 - z_1^{-1}) \quad (17)$$

윗식과 같은 성질에 따라 2차원 주파수 변환식은 다음과 같이 쓸 수가 있다.

$$z_2^{-1} \longrightarrow z_2^{-1} - \alpha / (1 - z_2^{-1}) \quad (18)$$

$$\text{단, } \alpha = \sin((w_c - w_u)/2) / \sin((w_c + w_u)/2) \quad (19)$$

3.2.2. 2차원 High-pass 필터

prototype low-pass 필터의 차단주파수 w_c 를 0.46π , 원하는 필터의 차단주파수 w_u 를 0.2π 로 한다.

3.2.3. 2차원 Band-pass 필터

prototype low-pass 필터의 차단주파수 w_c 를 0.46π , 원하는 필터의 중심주파수, 상한주파수,

아한주 파수가 각각 0.3π , 0.4π , 0.2π 인 경우로 한다.

3.2.4. 2차원 Band-reject 필터

prototype low-pass 필터의 차단주 파수 ω_c 를 0.46π , 원하는 필터의 중심주 파수, 상한주 파수, 아한주 파수가 각각 0.3π , 0.4π , 0.2π 인 경우로 한다.

4. Computer Simulation 결과 및 고찰

4.1 반복 계산 처리과정

본 연구에서는 2차원 low-pass 필터의 입력계수가 1차원 prototype low-pass 필터보다 많은 경우와 차단주 파수가 같다는 조건하에서 압력계수가 적은 경우 각각 2차원 low-pass 필터의 반복횟수를 관찰해 보았다.

또한 원하는 Low-pass 필터의 차단주 파수가 0.1π , 0.2π , 0.6π 로 변환된 경우와 High-pass 필터의 차단주 파수가 0.2π , Band-pass 및 Band-reject 필터의 중심주 파수, 상한주 파수, 아한주 파수가 각각 0.3π , 0.4π , 0.2π 인 경우에 있어서도 반복횟수를 고찰하였다.

각 algorithm 의 반복횟수는 low-pass 필터 및 Band-pass 필터는 $I=5, 15, 30, 65$ High-pass 필터 및 Band-reject 필터는 $I=5, 15, 35, 65$ 로 정하였다.

4.2 Computer Simulation 결과 및 검토

본 논문의 실험을 위해서 VAX 11 / 750 computer 가 사용되었다.

4.2.1. 2차원 low-pass 필터

$I=30$ 회 반복후 오차는 1% 이하로 감소하였으며, $I=65$ 회 반복하면 오차범위는 10^{-7} 이 됨을 알 수 있었다.

그림3은 차단주 파수를 0.2π 로 주파수 변환시킨 후, $\omega_2=0$ 로 놓았을 때 반복 계산 종료 후 특성을 나타낸 것이다.

그림4는 그림2와 차단주 파수가 같다는 조건하에서 고려한 것이고 그림5는 그림2와 비교해 계수가 많은 경우를 고려한 것이다.

그림6과 그림7은 차단주 파수를 0.1π , 0.6π 로 놓고 관찰해본 것이다.

실험결과 각각 30회 반복후 거의 원래의 값에 수렴한다.

4.2.2. 2차원 High-pass 필터

$I=35$ 회 반복후 오차는 1% 이하로 감소하였으며, $I=65$ 회 반복하면 오차범위는 10^{-5} 이 됨을 알 수 있었다.

그림8은 차단주 파수를 0.2π 로 주파수 변환시킨 후, $\omega_2=0$ 로 놓았을 때 반복 계산 종료 후 특성을 나타낸 것이다.

실험결과 35회 반복후 거의 원래의 값에 수렴한다.

4.2.3. 2차원 Band-pass 필터

$I=30$ 회 반복후 오차는 1% 이하로 감소하였으며, $I=65$ 회 반복하면 오차범위는 10^{-7} 이 됨을 알 수 있었다.

그림9는 필터의 중심주 파수, 상한주 파수, 아한주 파수를 각각 0.3π , 0.4π , 0.2π 로 주파수 변환시킨 후, $\omega_2=0$ 로 놓았을 때 반복 계산 종료 후 특성을 나타낸 것이다.

실험결과 30회 반복후 거의 원래의 값에 수렴한다.

4.2.4. 2차원 Band-reject 필터

$I=35$ 회 반복후 오차는 1% 이하로 감소하였으며, $I=65$ 회 반복하면 오차범위는 10^{-7} 이 됨을 알 수 있었다.

그림10은 필터의 중심주 파수, 상한주 파수, 아한주 파수를 각각 0.3π , 0.4π , 0.2π 로 주파수 변환시킨 후 $\omega_2=0$ 로 놓았을 때 반복 계산 종료 후 특성을 나타낸 것이다.

실험결과 35회 반복후 거의 원래의 값에 수렴한다

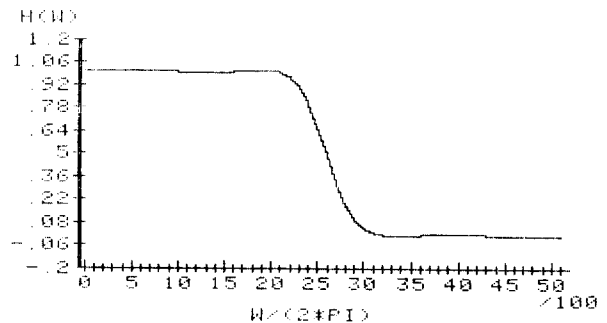


그림2. 1차원 prototype low-pass 필터
1-D prototype low-pass filter.

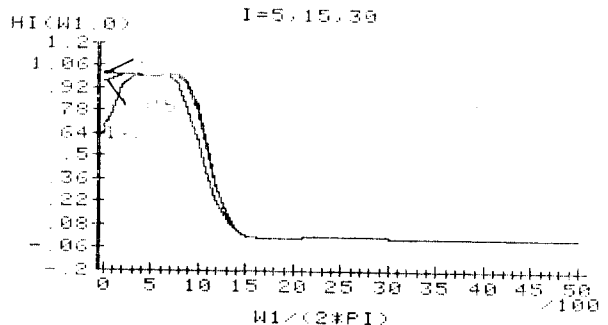


그림3. 반복 계산 종료 후 주파수 특성

The frequency characteristic when the iterative computation is terminated.

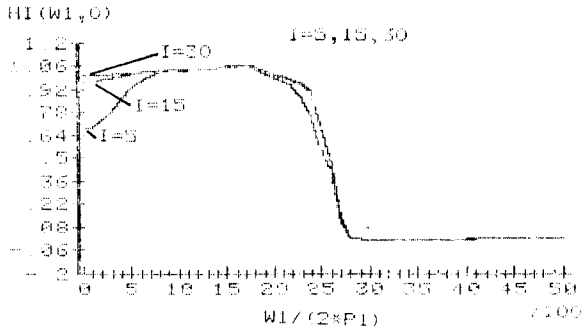


그림4. 반복 계산종료후 주파수 특성

The frequency characteristic when the iterative computation is terminated.

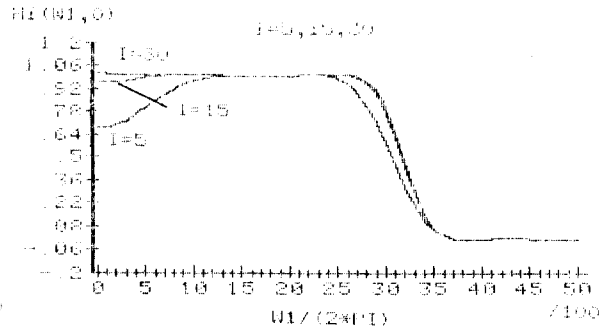


그림7. 반복 계산종료후 주파수 특성 ($W_u=0.6\pi$)

The frequency characteristic when the iterative computation is terminated

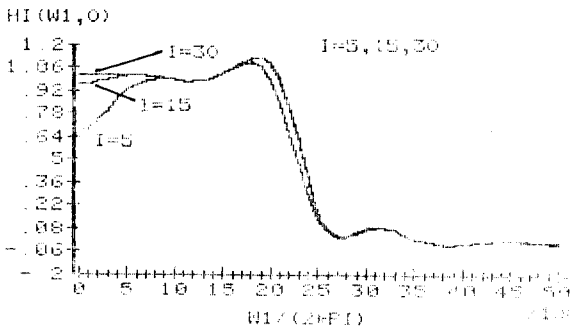


그림5. 반복 계산종료후 주파수 특성

The frequency characteristic when the iterative computation is terminated.

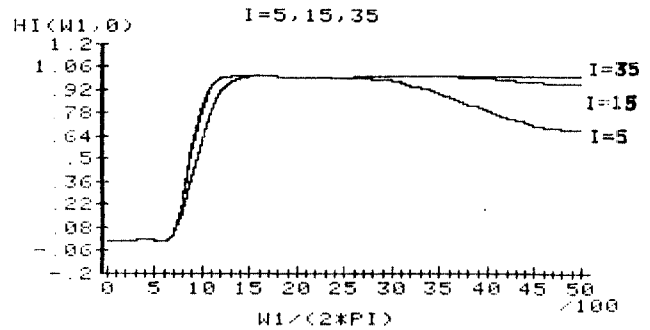


그림8. 반복 계산종료후 2차원 High-pass 필터의 주파수 특성.

The frequency characteristic of 2-D High-pass filter when the iterative computation is terminated.

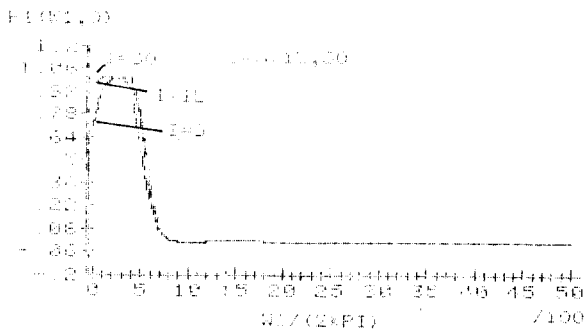


그림6. 반복 계산종료후 주파수 특성 ($W_u=0.1\pi$)

The frequency characteristic when the iterative computation is terminated.

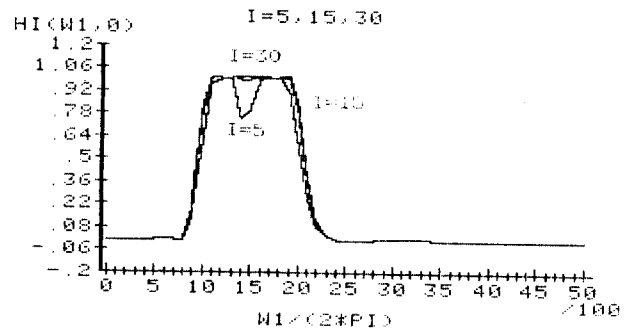


그림9. 반복 계산종료후 2차원 Band-pass 필터의 주파수 특성.

The frequency characteristic of 2-D Band-pass filter when the iterative computation is terminated.

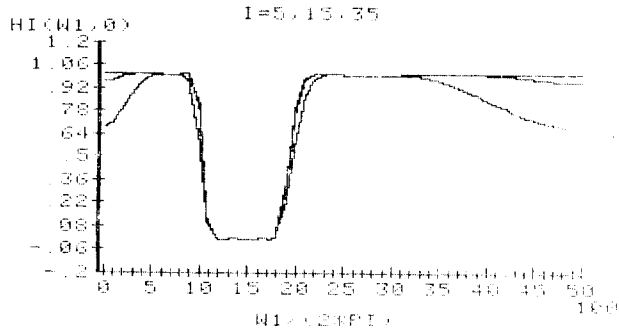


그림10. 반복 계산 종료 후 2차원 Band-reject 필터의 주파수 특성.

The frequency characteristic of 2-D Band-reject filter when the iterative computation is terminated.

4.3 3차원 영상처리.

그림11은 주파수 변환된 2차원 Low-pass 필터의 주파수 특성을 나타내고 있으며, 그림12는 2차원 Band-pass 필터의 주파수 특성을 나타내고 있다.

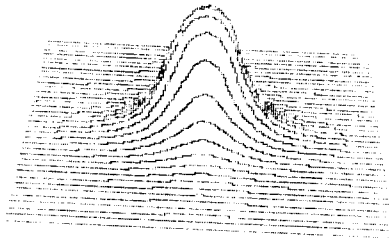


그림11. 2차원 low-pass 필터의 주파수 특성.
The frequency characteristic of 2-D low-pass filter.

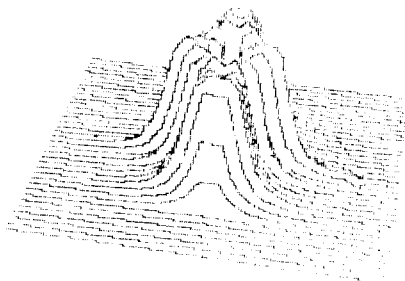


그림12. 2차원 Band-pass 필터의 주파수 특성.
The frequency characteristic of 2-D Band-pass filter.

5. 결 론

본 논문에서 1차원 prototype low-pass 필터는

McClellan 변환을 사용하여 2차원 필터로 변환시켰고, 변환된 2차원 필터는 2차원 Low-pass, High-pass, Band-pass, Band-reject 필터로 주파수 변환시킨 후, 각각 반복 계산 알고리즘에 의해 구현시켰다.

실험결과 입력 data 의 계수가 많은 경우와 차단 주파수가 같다는 조건하에서 계수가 적은 경우, 또는 원하는 필터의 차단 주파수를 각각 변환시켜가면서 관찰해본 결과 어떤 경우든 간에 Low-pass 필터는 반복 횟수가 30회 정도에서 오차범위가 1% 이하로 감소하였다.

그리고 High-pass 필터와 Band-reject 필터는 35회 정도에서, Band-pass 필터는 30회 정도에서 오차가 1% 이하로 감소하였으며, 각각의 반복 횟수는 Low-pass 필터의 경우를 미루어 보아 어떤 경우든 간에 35회, 30회에서 성립될 것으로 추정할 수가 있다.

참 고 문 헌

- (1) M.P. Ekstrom and J.W. Woods, "Two-dimensional spectral factorization with applications in recursive digital filtering," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, Vol. ASSP-24, p.115, 1976.
- (2) D.E. Dudgeon, "An iterative implementation for 2-D digital filter," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, Vol. ASSP-28, no.6, Dec. 1980.
- (3) T.F. Quatieri and D.E. Dudgeon, "Implementation of 2-D digital filters by iterative methods," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, Vol. ASSP-30, no. 3, June, 1982.
- (4) R.M. Mersereau, W.F.G. Mecklenbrauker, and T.F. Quatieri, Jr., "McClellan transformations for two-dimensional digital filtering: I-Design," *IEEE Trans. Circuits System*, Vol. CAS-23, p. 405, 1976
- (5) W.F.G. Mecklenbrauker and R.M. Mersereau, "McClellan transformations for two-dimensional digital filtering: II-Implementation," *IEEE Trans. Circuits system*, Vol. CAS-23, P. 414, 1976.
- (6) A.V. Oppenheim and R.W. Schaffer, *Digital Signal Processing*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1975.
- (7) L.R. Rabinar and B. Gold, *Theory and application of digital signal processings*. Englewood cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1975
- (8) 장배용 "2차원 Digital Filter의 반복 실현에 관한 연구." *항공대 석사논문*, 1985, 2월