

주파수 가변 마이크로 웨이브 공진기에 관한 연구

이 승 무, 홍 의 석  
광운대학 전자통신공학과

A Study on the Microwave Resonator of Variable Frequency

Seung Moo Lee, Ui Seok Hong

Dept. of Electronic Communication Eng., Kwangwoon University

Abstract.

In this paper, coupling coefficients are presented between modes of cylindrical waveguide and those of coaxial cable to calculate the resonant frequencies. These are obtained by the mode matching techniques and mode orthogonality. Mode analysis and calculation of coupling coefficients is performed exactly by the VAX-11/750 system. The results are applicable to microwave devices such as dielectric resonator, filter, mixer and oscillator.

1. 서론

동공 공진기(cavity resonator)는 제2차 세계대전을 전후하여 연구가 시작된 분야로서, 주로 구형(rectangular), 원통형(cylindrical) 및 동축형(coaxial) 공진기를 그 대상으로 하였다.

1960년대 이전까지 이들 공진기의 해석은 인덕턴스(inductance)와 커패시턴스(capacitance)를 포함한 등가회로를 이용하는 방법이었으며, 이러한 방법으로는 기본모드(dominant mode) 이상의 정확한 공진주파수를 계산하기가 어려웠다.<sup>(1)</sup>

이후, 컴퓨터의 출현으로 수치해석에 의한 공진회로의 해석과 고차모드(higher mode)에 대한 정확한 공진주파수의 계산이 가능하게 되었다.

본 논문에서는 공진기의 벽면(wall)을 완전도체( $\sigma = \infty$ )로 가정하여 경계면에서의 고유치방정식(eigenvalue equation)을 유도 하였다. 기하학적 구조에 의하여 각 영역내에 존재하는 Ez, Hz를 결정함으로써 전계와 자계의 transverse성분을 구하고, 모드 결합기법(mode matching techniques)과 모드 직교성(mode orthogonality)을 이용한 수치해석법을 사용하여 공진주파수의 계산에 필요한 결합계수(coupling coefficient)를 계산 하였다.<sup>(2,3)</sup>

계산 결과는 유전체 공진기(dielectric resonator)는 물론 필터(filter), 믹서(mixer) 및 발진기(oscillator)에도 적용이 가능하다.

2. 이론

마이크로웨이브 공진기는 개방정도에 따라 개방형과 완전차폐형으로 구분할 수 있다. 개방형 공진기는 전기적으로 고유진동 능력을 가지고 있으며 그 전계와 자계가 3차원적으로 완전차폐 상태가 아니며, 완전차폐공진기는 동공공진기(cavity resonator)나 동축케이블공진기(coaxial resonator)와 같은 형태로 이루어졌다.<sup>(4)</sup>

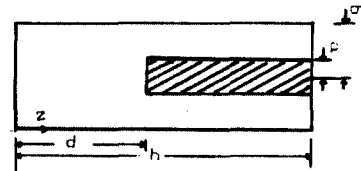


그림 1. 공진기 구조

본 논문에서는 그림 1과 같이, 영역 I 은 원형 도파관, 영역 II 는 동축케이블로 구성된 완전차폐공진기내에서 TM<sub>0n</sub> 및 TE<sub>0n</sub> 모드에 대한 공진주파수를 결정하기 위한 결합계수를 계산 하였다.

(1) 영역 I, II에서의 전계와 자계 해석.

영역 I, II에 존재하는 TM과 TE모드의 field성분은 다음과 같다.<sup>(5)</sup>

$$\begin{aligned}
 E_r &= -\frac{j\omega\mu}{k_z^2} \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} & E_r &= \frac{-j\beta}{k_z^2} \frac{\partial E_z}{\partial r} \\
 E_\phi &= \frac{j\omega\mu}{k_z^2} \frac{\partial H_z}{\partial r} & E_\phi &= \frac{-j\beta}{k_z^2} \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} \\
 E_z &= 0 & H_r &= \frac{j\omega\epsilon}{k_z^2} \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} \\
 H_r &= \frac{-j\beta}{k_z^2} \frac{\partial H_z}{\partial r} & H_\phi &= -\frac{j\omega\epsilon}{k_z^2} \frac{\partial E_z}{\partial r} \\
 H_\phi &= \frac{-j\beta}{k_z^2} \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} & H_z &= 0
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

각 영역에서 MAXWELL 방정식을 만족하는 field를 구하기 위해서는 longitudinal 성분을 결정해야 하며, z의 정방향으로 진행하는 파에 대한 표현식은 다음과 같다.

영역 I:

$$E_z = E_m \cdot J_m(K_c \cdot \rho) \cdot \cos(m\phi) \\ H_z = H_m \cdot J_m(k_c \cdot \rho) \cdot \cos(m\phi) \quad (2)$$

영역 II:

$$E_z = (A_m \cdot J_m(K_c \cdot \rho) + B_m \cdot N_m(K_c \cdot \rho)) \cdot \cos(m\phi) \\ H_z = (A_m \cdot J_m(K_c \cdot \rho) + B_m \cdot N_m(K_c \cdot \rho)) \cdot \cos(m\phi)$$

위의 식에서  $E_m, H_m, A_m, B_m$ 은 상수이며,  $J_m(K_c \cdot \rho), N_m(K_c \cdot \rho)$ 는 각각 m차 제1종 및 제2종 Bessel함수이고 m은 정수이다.<sup>(3)</sup>

공진기를 구성하는 도체벽면에 경계조건 ( $E_t = 0, H_n = 0$ )을 적용하면,

$$\text{영역 I: } E_\theta \Big|_{\rho=b} = 0 \\ \text{영역 II: } E_\theta \Big|_{\rho=a, b} = 0$$

이므로, 고유치 방정식은 다음과 같다.

$$\text{영역 I: } J_m(K_c \cdot b) = 0 \quad (TM) \\ J'_m(K_c \cdot b) = 0 \quad (TE) \\ \text{영역 II: } J_m(K_c \cdot a) \cdot N_m(K_c \cdot b) \\ - J_m(K_c \cdot b) \cdot N_m(K_c \cdot a) = 0 \quad (TM) \\ J'_m(K_c \cdot a) \cdot N'_m(K_c \cdot b) \\ - J'_m(K_c \cdot b) \cdot N'_m(K_c \cdot a) = 0 \quad (TE) \quad (3)$$

여기서, 고유치  $K_c$  ( $i = I, II$ )는

$$K_c^2 = k^2 - \gamma^2 = k^2 - \beta^2 = k^2 - \omega^2 \mu \epsilon \quad (4)$$

이다. 또 영역 II의 기본모드(dominant mode)인 TEM<sub>00</sub> 또는  $K_c = 0$ 이므로  $\beta = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$  이다.

## (2) METHOD

$z = 0, h$  일때 경계조건  $E_{\theta v} = 0$ 와  $E_{\theta u} = 0$ 를 고려하면, 각 영역에서의  $E_t, H_t$ 는 다음과 같이 된다.

$$\text{영역 I: } E_t = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cdot \sin(\beta_c \cdot z) \cdot E_{tm} \\ H_t = \sum_{m=1}^{\infty} j \cdot A_m \cdot \cos(\beta_c \cdot z) \cdot H_{tm} \quad (5)$$

$$\text{영역 II: } E_t = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \cdot \sin(\beta_c \cdot (z-h)) \cdot E_{tm} \\ H_t = \sum_{m=1}^{\infty} j \cdot B_m \cdot \cos(\beta_c \cdot (z-h)) \cdot H_{tm}$$

여기서,  $A_m, B_m$ 는 상수이다.

영역 I, II의 경계면 ( $z = d$ )에서의 전계와 자계의 접선(tangential) 성분이 연속이므로 식(5)으로 부터

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_m \cdot \sin(\beta_c \cdot d) \cdot E_{tm} \\ = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \cdot \sin(\beta_c \cdot (d-h)) \cdot E_{tm} \\ \sum_{m=1}^{\infty} j \cdot A_m \cdot \cos(\beta_c \cdot d) \cdot H_{tm} \\ = \sum_{m=1}^{\infty} j \cdot B_m \cdot \cos(\beta_c \cdot (d-h)) \cdot H_{tm} \quad (6)$$

가 되며, 식(6)에 모드의 직교성을 적용하면 다음의 같은 결합계수와 진력계수가 유도 된다.<sup>(4)</sup>

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_m \cdot \sin(\beta_c \cdot d) \cdot P_{vm} \\ = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \cdot \sin(\beta_c \cdot (d-h)) \cdot P_{uh} \\ \sum_{m=1}^{\infty} j \cdot A_m \cdot \cos(\beta_c \cdot d) \cdot P_{vu} \\ = \sum_{m=1}^{\infty} j \cdot B_m \cdot \cos(\beta_c \cdot (d-h)) \cdot P_{ue} \quad (7)$$

$$\text{여기서, } P_{vu} = \int_0^a (E_{\theta v} \cdot H_{\theta u}) \cdot 2z \cdot dF$$

$$P_{uv} = \int_0^a (E_{\theta u} \cdot H_{\theta v}) \cdot 2z \cdot dF \quad (8)$$

$$P_{uh} = \int_0^a (E_{\theta u} \cdot H_{\theta u}) \cdot 2z \cdot dF$$

$$P_{ue} = \int_0^a (E_{\theta u} \cdot H_{\theta u}) \cdot 2z \cdot dF$$

결합 계수  $P_{vu}$ 를 결정하기 위하여 각 영역에 n개의 모드가 존재한다고 가정하면, 각 영역에서의 모드는

$$\text{영역 I: } TM_{01}, TM_{02}, TM_{03}, \dots, TM_{0n} \\ TE_{01}, TE_{02}, TE_{03}, \dots, TE_{0n} \\ \text{영역 II: } TEM, TM_{01}, TM_{02}, \dots, TM_{0(n-1)} \\ TE_{01}, TE_{02}, TE_{03}, \dots, TE_{0n}$$

의 순으로 나타낸다고 생각할 수 있다

이때, 각 영역내에 존재하는 모드의 결합관계는 도표1.과 같고 결합계수  $P_{vu}$ 도 같은 방법을 적용하여 도표2.의 결과를 얻을 수 있다.<sup>(5)</sup>

$TM_{01} \cdot TEM$	$TM_{01} \cdot TM_{01}$	$TM_{01} \cdot TE_{01}$	$TM_{01} \cdot TE_{02}$	$TM_{01} \cdot TE_{03}$	$TM_{01} \cdot TE_{04}$	$TM_{01} \cdot TE_{05}$	$TM_{01} \cdot TE_{06}$	$TM_{01} \cdot TE_{07}$	$TM_{01} \cdot TE_{08}$	$TM_{01} \cdot TE_{09}$	$TM_{01} \cdot TE_{10}$
$TM_{01} \cdot TM_{01}$	$TM_{01} \cdot TM_{02}$	$TM_{01} \cdot TM_{03}$	$TM_{01} \cdot TM_{04}$	$TM_{01} \cdot TM_{05}$	$TM_{01} \cdot TM_{06}$	$TM_{01} \cdot TM_{07}$	$TM_{01} \cdot TM_{08}$	$TM_{01} \cdot TM_{09}$	$TM_{01} \cdot TM_{10}$	$TM_{01} \cdot TE_{01}$	$TM_{01} \cdot TE_{02}$
$TM_{01} \cdot TE_{01}$	$TM_{01} \cdot TE_{02}$	$TM_{01} \cdot TE_{03}$	$TM_{01} \cdot TE_{04}$	$TM_{01} \cdot TE_{05}$	$TM_{01} \cdot TE_{06}$	$TM_{01} \cdot TE_{07}$	$TM_{01} \cdot TE_{08}$	$TM_{01} \cdot TE_{09}$	$TM_{01} \cdot TE_{10}$	$TE_{01} \cdot TEM$	$TE_{01} \cdot TM_{01}$
$TM_{01} \cdot TE_{02}$	$TM_{01} \cdot TE_{03}$	$TM_{01} \cdot TE_{04}$	$TM_{01} \cdot TE_{05}$	$TM_{01} \cdot TE_{06}$	$TM_{01} \cdot TE_{07}$	$TM_{01} \cdot TE_{08}$	$TM_{01} \cdot TE_{09}$	$TM_{01} \cdot TE_{10}$	$TE_{02} \cdot TEM$	$TE_{02} \cdot TM_{01}$	$TE_{02} \cdot TM_{02}$
$TM_{01} \cdot TE_{03}$	$TM_{01} \cdot TE_{04}$	$TM_{01} \cdot TE_{05}$	$TM_{01} \cdot TE_{06}$	$TM_{01} \cdot TE_{07}$	$TM_{01} \cdot TE_{08}$	$TM_{01} \cdot TE_{09}$	$TM_{01} \cdot TE_{10}$	$TE_{03} \cdot TEM$	$TE_{03} \cdot TM_{01}$	$TE_{03} \cdot TM_{02}$	$TE_{03} \cdot TM_{03}$
$TM_{01} \cdot TE_{04}$	$TM_{01} \cdot TE_{05}$	$TM_{01} \cdot TE_{06}$	$TM_{01} \cdot TE_{07}$	$TM_{01} \cdot TE_{08}$	$TM_{01} \cdot TE_{09}$	$TM_{01} \cdot TE_{10}$	$TE_{04} \cdot TEM$	$TE_{04} \cdot TM_{01}$	$TE_{04} \cdot TM_{02}$	$TE_{04} \cdot TM_{03}$	$TE_{04} \cdot TM_{04}$
$TM_{01} \cdot TE_{05}$	$TM_{01} \cdot TE_{06}$	$TM_{01} \cdot TE_{07}$	$TM_{01} \cdot TE_{08}$	$TM_{01} \cdot TE_{09}$	$TM_{01} \cdot TE_{10}$	$TE_{05} \cdot TEM$	$TE_{05} \cdot TM_{01}$	$TE_{05} \cdot TM_{02}$	$TE_{05} \cdot TM_{03}$	$TE_{05} \cdot TM_{04}$	$TE_{05} \cdot TM_{05}$
$TM_{01} \cdot TE_{06}$	$TM_{01} \cdot TE_{07}$	$TM_{01} \cdot TE_{08}$	$TM_{01} \cdot TE_{09}$	$TM_{01} \cdot TE_{10}$	$TE_{06} \cdot TEM$	$TE_{06} \cdot TM_{01}$	$TE_{06} \cdot TM_{02}$	$TE_{06} \cdot TM_{03}$	$TE_{06} \cdot TM_{04}$	$TE_{06} \cdot TM_{05}$	$TE_{06} \cdot TM_{06}$
$TM_{01} \cdot TE_{07}$	$TM_{01} \cdot TE_{08}$	$TM_{01} \cdot TE_{09}$	$TM_{01} \cdot TE_{10}$	$TE_{07} \cdot TEM$	$TE_{07} \cdot TM_{01}$	$TE_{07} \cdot TM_{02}$	$TE_{07} \cdot TM_{03}$	$TE_{07} \cdot TM_{04}$	$TE_{07} \cdot TM_{05}$	$TE_{07} \cdot TM_{06}$	$TE_{07} \cdot TM_{07}$
$TM_{01} \cdot TE_{08}$	$TM_{01} \cdot TE_{09}$	$TM_{01} \cdot TE_{10}$	$TE_{08} \cdot TEM$	$TE_{08} \cdot TM_{01}$	$TE_{08} \cdot TM_{02}$	$TE_{08} \cdot TM_{03}$	$TE_{08} \cdot TM_{04}$	$TE_{08} \cdot TM_{05}$	$TE_{08} \cdot TM_{06}$	$TE_{08} \cdot TM_{07}$	$TE_{08} \cdot TM_{08}$
$TM_{01} \cdot TE_{09}$	$TM_{01} \cdot TE_{10}$	$TE_{09} \cdot TEM$	$TE_{09} \cdot TM_{01}$	$TE_{09} \cdot TM_{02}$	$TE_{09} \cdot TM_{03}$	$TE_{09} \cdot TM_{04}$	$TE_{09} \cdot TM_{05}$	$TE_{09} \cdot TM_{06}$	$TE_{09} \cdot TM_{07}$	$TE_{09} \cdot TM_{08}$	$TE_{09} \cdot TM_{09}$
$TM_{01} \cdot TE_{10}$	$TE_{10} \cdot TEM$	$TE_{10} \cdot TM_{01}$	$TE_{10} \cdot TM_{02}$	$TE_{10} \cdot TM_{03}$	$TE_{10} \cdot TM_{04}$	$TE_{10} \cdot TM_{05}$	$TE_{10} \cdot TM_{06}$	$TE_{10} \cdot TM_{07}$	$TE_{10} \cdot TM_{08}$	$TE_{10} \cdot TM_{09}$	$TE_{10} \cdot TM_{10}$

## 3. simulation 결과 및 검토

공진기의 기하학적 구조 ( $a = 6 \cdot E-3m, b = 14 \cdot E-3m$ )로 결정되는  $K_c$ 와  $\gamma$  등을 구해야 되는데,  $K_c$ 는 다항근사식(polynomial approximation)에 의한 식(3)의 수치해석으로 구하고, 이  $K_c$ 값을 식(4)에 대입하여  $\gamma$ 를 구하였다.

그림2.는 동축케이블의 외경과 내경의 비( $b/a$ )에 대한  $K_c a$ 의 변화를 나타내고 있으며, 이것을 H.A. Atwater가 제시한 그림3.과 비교해 보았고, 또 루파수와  $K_0$ 로 규준화(normalized)된 전파상수의 관계는 그림4.에 나타냈다.<sup>(6)</sup>

모드 결합법과 모드의 직교성을 이용하여 식(8)을 유도하고, 식(1)에서 유도된 전계 및 자계의 transverse 성분을 식(8)에 대입하여 결합계수를 구했고, 그 결과를 그림5., 6.에 제시하였다.

결합계수를 식(7)에 대입하여 계수를 소거하면 한계의 방정식을 얻으며, 이 방정식을 만족하는 해가 공진주파수 값이 된다.

일례를 들면,  $z = d = h (5 \cdot E-2m)$ 일때 그림1.은 원형공통공진기가 되므로, 일반적인 공진주파수 계산 공식

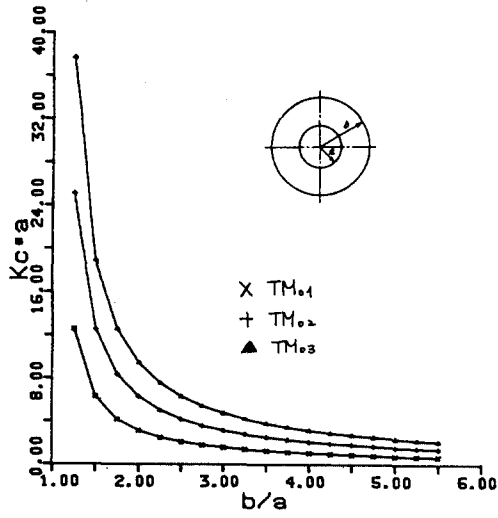
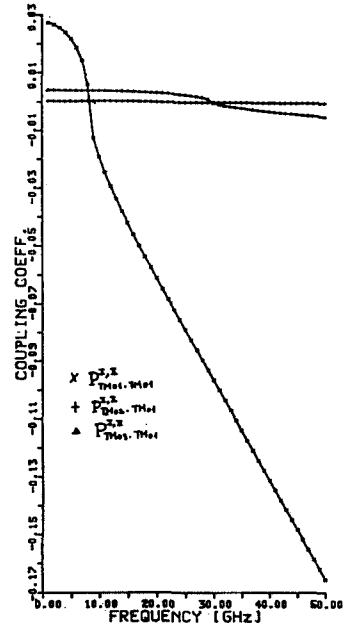


그림 2. 차단주파수 대 반경비 (동축 케이블)



( a )

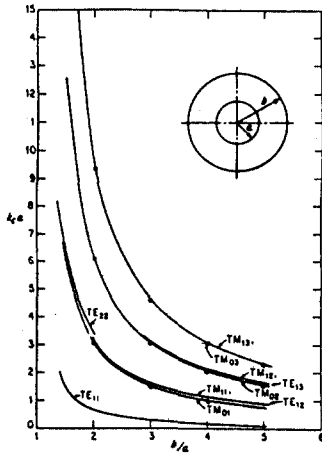


그림 3. Ref. ( ? )

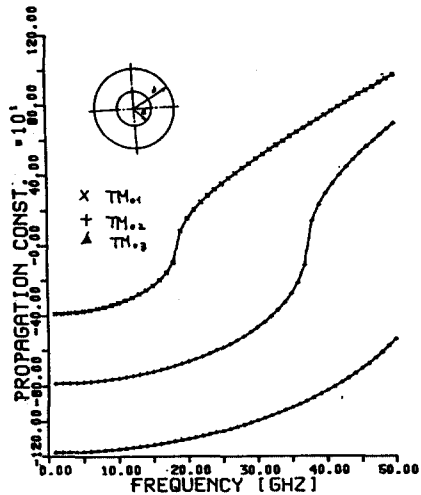
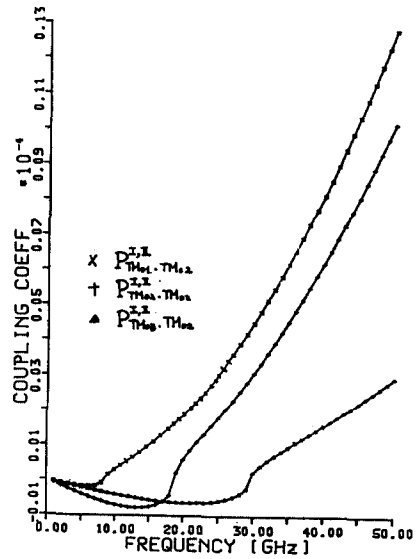
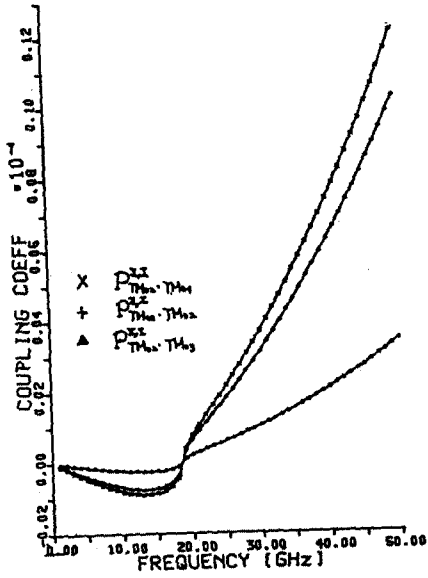


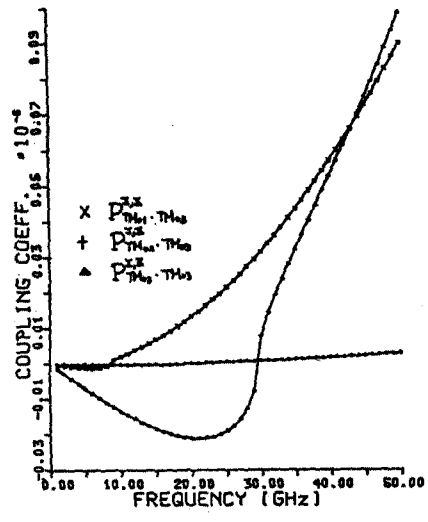
그림 4. 전파상수 대 주파수 (동축 케이블)



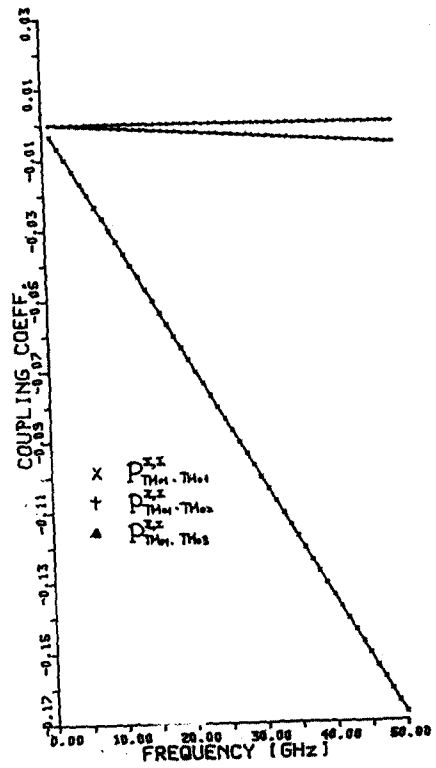
( b )



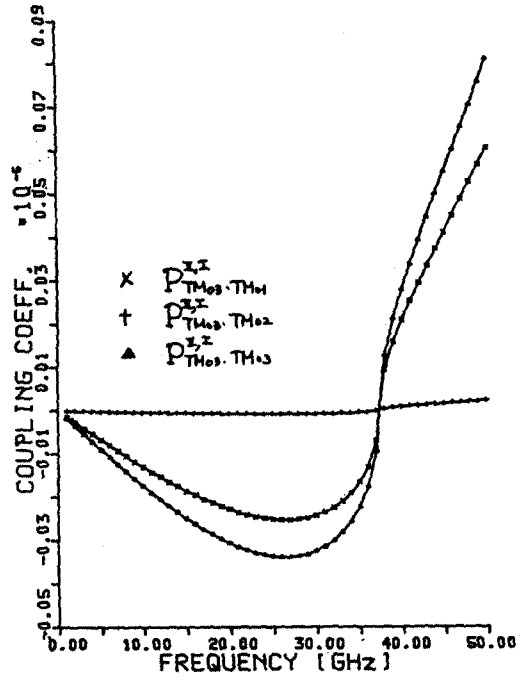
(c)



(e)

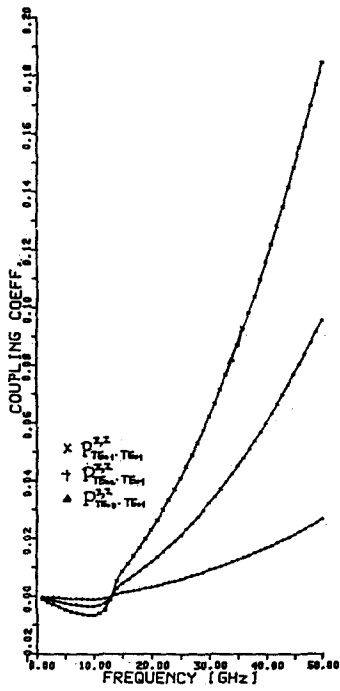


(d)

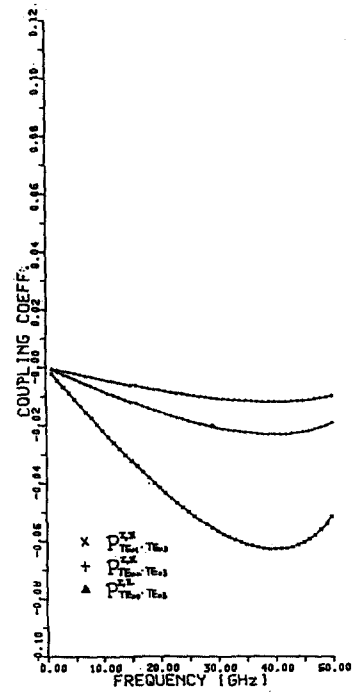


(f)

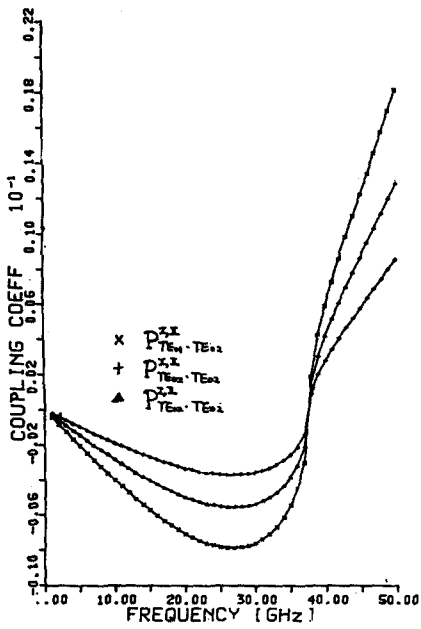
TM mode의 결합 계수 (TM mode)



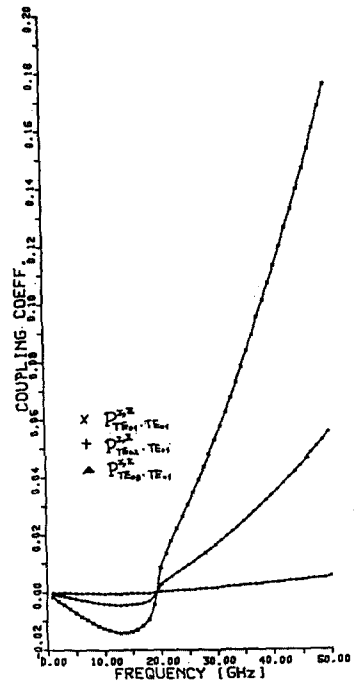
(a)



(c)



(b)

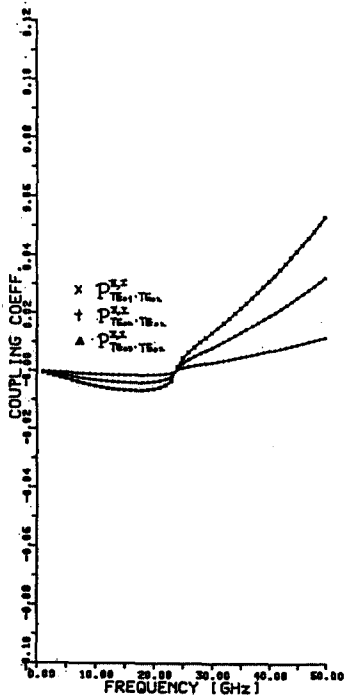


(d)

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(k_c\right)^2 + \left(\frac{q\pi}{d}\right)^2} \quad (\text{TE})$$

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(k_c\right)^2 + \left(\frac{q\pi}{d}\right)^2} \quad (\text{TM})$$

에 의한 결과와 수치계산결과와 도표 3. 과 같이  $10^{-4}$  까지 일치하고 있어, 본 논문에서 제시한 결합계수의 정확도를 입증할 수 있다.



(e)

TM 모드 (z=d=h)		
공진수	공식	수치결과
1	8.1956	8.1955
2	8.7267	8.7265
3	10.1546	10.1545

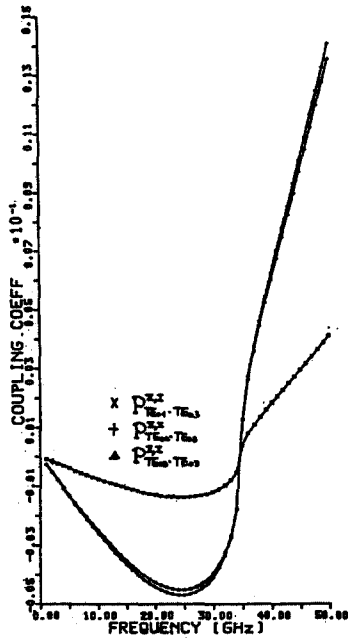
TE 모드 (z=d=h)		
공진수	공식	수치결과
1	13.3981	13.3981
2	14.3691	14.3692
3	15.8558	15.8557

도표 3.

#### 4. 결론

공진기 해석에 있어서, 등가회로에 의한 방법은 앞서 언급한 바와 같이 많은 오차가 있기 때문에, 유전체 공진기동에 적용된 모드 결합법과 모드의 직교성을 이용하여 각 모드간의 결합관계를 구함으로써 공진주파수 계산을 용이하게 하였다.<sup>(7-9)</sup>

이러한 결합계수를 이용하면 정확한 공진주파수를 계산하게 되어 공진기 해석은 물론 설계 및 제작에 크게 기여하게 될 것이다.



(f)

그림 6. 영국 I. II 에서의 결합계수 대 주파수(TE mode)

#### 5. 참고 문헌

1. P.J.B.Clarricoat, "Numerical solution of waveguide-discontinuity problems".PROC.IEE.,Vol.114.No.7,pp878-886,July,1967.
2. U.S.HONG, "Zur Berechnung Geschirmter Dielektrischer Resonatoren",Ph.D.d-issertation,RWTH Aachen Germany,1982.
3. 홍 의석, "마이크로웨이브 직립회로에서 유전체 공진기", 전자공학의 추계학술대회 논문집,Vol.6.No.2,pp65-68,1983.
4. INGO WOLFF, "The Electromagnetic Fields and the Phase Consts of Dielectric Image Lines".IEEE MTT.,Vol.26..No.4,April,1978.
5. RAJ MITTRA, "Analysis of Open Dielectric Waveguides using Mode-Matching Technique and Variational Methods".IEEE MTT.,Vol.28.No.1,January,1980.
6. KEITH HENNEY, "RADIO ENGINEERING HANDBOOK",New York,McGRAW-HILL BOOK COMPANY,1959,Chap.6.
7. H.A.Atwater, "Introduction to Micro wave Theory",New York,McGRAW-HILL BOOK COMPANY,1962,Chap.3.
8. Irene A.Stegun, "HANDBOOK OF MATHEMATICAL FUNCTIONS",New York,DOVER PUBLICATIONS,INC.,1970,Chap.9.