

유전체로 일부 채워진 도파관의 체계적인 해석

이훈, 김재영, 손현
경북대학교 전자공학과

A Systemical Analysis of Rectangular Waveguide
Filled Partially with Dielectric Material

Hoon Lee, Che Young Kim, Hyum Son
Department of Electronics, Kyung Pook National University

(Abstract) A systematic and analytical procedures such as modal expansion method and variational principle are used to evaluate the electromagnetic field and the equivalent Z-parameter due to the field induction inside the rectangular waveguide. The material has finite length and is lossy. In this paper, the higher order modes are truncated since they decay rapidly for large n.

1. 서론

유전체로 채워진 여러가지 형태의 도파관에 대한 연구는 대역폭 개선과 전력전송능력의 향상 및 감쇠의 감소등의 특징이 있어서 오래전부터 많은 연구의 관심이 되어왔다.(1-4) 또 최근에는 수치해석과 대형 컴퓨터의 이용으로 복잡한 구조의 문제에 대해서도 활발한 연구가 진행되고 있다.

대부분의 경우 전파 방향으로 유전체가 무한히 채워진 구조에 대해 해석을 많이 해왔으나 실제적인 방사문제에 있어서 피측정물의 길이는 유한하므로 본 논문에서는 길이가 유한한 유전체를 택하게 되었다.(5)

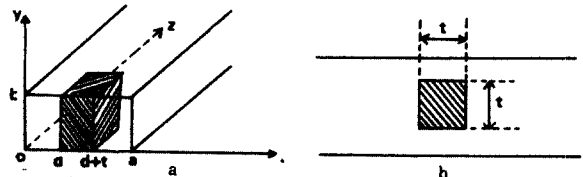
유전체는 긴 단면의 중심으로부터 대칭적인 구조를 이루며, 손실이 있는 물질을 택했으며 전자계표현식은 모드전개 방법을 이용하여 급수형태로 표현했고 그 결과를 이용하여 등가 Z-parameter를 구했다.

이상의 결과로부터 전력전송능력이나 유전체에서의 열 분포 및 감쇠 정수의 계산이 쉽게 이루어지며 아울러 감쇠기나 위상 천이기의 설계가 가능하게된다.

2. 이론

본 논문에서 다룬 문제의 구조는 아래와 같이 유전체가 두께 t, 길이 l, 비유전율 ε, Loss tangent δ로서 도파관의 중심에 대칭적으로 유한하게 채워진 경우이며 도파관은 가로 a, 세로 b로 한다.

입사된 파는 z = -∞로부터 들어오는 변수 y와는 무관한 H₁₀ 파로 가정한다. 이때 불균일 물질에 여기되는 파는 H₀ 모드가 된다.(6)



<그림 1> a. 유전체가 대칭적으로 채워진 도파관 b. 평면도
<Fig. 1> a. The model geometry b. Top view

(1) 모드 전개

전자계에 대한 Vector Maxwell 방정식은 시간에 대한 기준을 exp(jωt)로 택한 경우 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$\nabla \times \mathbf{H} = -j\omega\mu\mathbf{H} - \mathbf{M} \dots\dots\dots (1-1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = j\omega\epsilon\mathbf{E} + \mathbf{J} \dots\dots\dots (1-2)$$

식(1)을 만족하는 벡터 전자계 함수는 서로 독립인 전파방향의 성분과 그 방향에 대해 직교하는 단면방향의 성분의 곱으로 표시할 수 있으며 전파방향의 성분은 등가 전송선로 방정식과 전원조건으로부터 구할 수 있고, 단면방향성분은 모드함수와 전자계의 연속정리로부터 구할 수가 있다.(7)

따라서 단면방향의 전자계는

$$\mathbf{E}_n(\mathbf{r}) = \sum V_n(z) \mathbf{e}_n(x) \dots\dots\dots (2-1)$$

$$\mathbf{H}_n(\mathbf{r}) = \sum I_n(z) \mathbf{h}_n(x) \dots\dots\dots (2-2)$$

단, $\mathbf{e}_n(x), \mathbf{h}_n(x)$: Vector mode function

$V_n(z), I_n(z)$: Scalar mode voltage/current

$$\mathbf{h}_n(z) = \mathbf{z}_0 \times \mathbf{e}_n$$

로 표시되고 $V_n(z), I_n(z)$ 는 등가전송선로 방정식으로부터 아래와 같은 미분방정식을 구하여서 그때의

해가 된다.

즉,

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + \chi_n^2\right) V_n(z) = 0 \quad (3-1)$$

$$I_n(z) = -\frac{dV_n(z)}{dz} / (j\chi_n Z_m) \quad (3-2)$$

단, $Z_{on} = \omega\mu_0/\chi_n$

$\chi_n = (K_o^2 - K_m^2)^{1/2}$, K_m : 단면방향의 파수

$K_o^2 = \omega^2\mu_0\epsilon_0$

한편, 벡터 모드 함수 e_n, h_n 은 주어진 경계조건을 만족하는 스칼라 모드 함수 $\phi_n(x)$ 를 도입하여 구한다.

$$h_n = -\nabla_t \phi_n(x) / K_m \quad (4)$$

한편, $\phi_n(x)$ 는 파동방정식

$$(\nabla^2 + K_o^2) \phi_n(x) = 0 \quad (5)$$

와 경계조건

$$\partial \phi_n(x) / \partial s = 0$$

단, s 는 단면에 수직인 벡터

에서 구한다.

주어진 구조에서 세 영역에서 위에서 서술한 방법을 이용하여 $E_t(r)$ 및 $H_t(r)$ 을 구하면 아래와 같다.

1) $Z < 0$ 영역

$$E_t(r) = -Y_0 \sum_{n=1,3,\dots} C_n \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a} \exp(j\chi_{no}z) + \underline{E}_{tn} \quad (6-1)$$

$$\text{단, } \underline{E}_{tn} = Y_0 \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a} \exp[-j\sqrt{K_o^2 - (\frac{n\pi}{a})^2} z]$$

$$\underline{H}_t(r) = X_0 \sum_{n=1,3,\dots} \frac{C_n}{Z_{on}} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a} \exp[j\chi_{no}z]$$

$$- \frac{E_{tn}}{Z_a} \quad (6-2)$$

$$\text{단, } Z_{o1} = \omega\mu_0/\chi_{o1} = \frac{K^2}{\chi_{o1}} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

2) $0 < z < t$ 영역

(a) $0 < x < d$ 영역

$$\underline{E}_t(r) = Y_0 \sum_{n=1,3,\dots} (D_{1n} \exp[-j\chi_n z] + D_{2n} \exp[j\chi_n z])$$

$$\frac{W_n}{K_{in}} \sin K_{in} x \quad (7-1)$$

$$\underline{H}_t(r) = X_0 \sum_{n=1,3,\dots} (D_{1n} \exp[-j\chi_n z] - D_{2n} \exp[j\chi_n z])$$

$$\frac{W_n}{Z_{on} K_{in}} \sin K_{in} x \quad (7-2)$$

(b) $d < x < d+t$ 영역

$$\underline{E}_t(r) = -Y_0 \sum_{n=1,3,\dots} (D_{1n} \exp[-j\chi_n z] + D_{2n} \exp[j\chi_n z])$$

$$B_n \cos K'_{in} (x - \frac{d}{2}) \quad (8-1)$$

$$\underline{H}_t(r) = X_0 \sum_{n=1,3,\dots} (D_{1n} \exp[-j\chi_n z] - D_{2n} \exp[j\chi_n z])$$

$$\frac{B_n}{Z_{on}} \cos K'_{in} (x - \frac{d}{2}) \quad (8-2)$$

$$\text{단, } Z'_{on} = Z_{on} \left| \frac{K'_o}{K_o} = K_o, K'_o = \omega^2\mu_0\epsilon_0(1-j\tan\delta) \right.$$

$$B_n = \frac{W_n}{K'_{in}} \cdot \frac{\cos K'_{in} d}{\sin \frac{K'_{in} t}{2}}$$

$$W_n = \left[\frac{1}{|K'_{in}|} - \left\{ \frac{\sin(K'_{in} - K_o^2) d}{K'_{in} - K_o^2} - \frac{\sin(K'_{in} + K_o^2) d}{K'_{in} + K_o^2} \right\} \right]$$

$$+ \frac{|\cos K'_{in} d|}{|K'_{in}| \sin \frac{K'_{in} t}{2}} \left\{ \frac{\sin(K'_{in} - K_o^2) d}{K'_{in} - K_o^2} \right\}$$

$$+ \frac{\sin(K'_{in} + K_o^2) d/2}{K'_{in} + K_o^2} \left. \right\}^{-1/2} \quad (8-3)$$

(c) $d+t < x < a$ 영역

$$\underline{E}_t(r) = Y_0 \sum_{n=1,3,\dots} (D_{1n} \exp[-j\chi_{no}z] + D_{2n} \exp[j\chi_{no}z])$$

$$\frac{W_n}{K_{in}} \sin K_{in} (a-x) \quad (9-1)$$

$$\underline{H}_t(r) = X_0 \sum_{n=1,3,\dots} (D_{1n} \exp[-j\chi_{no}z] - D_{2n} \exp[j\chi_{no}z])$$

$$\frac{W_n}{Z_{on} K_{in}} \sin K_{in} (a-x) \quad (9-2)$$

3) $z > t$ 영역

$$\underline{E}_t(r) = Y_0 \sum_{n=1,3,\dots} C'_n \sqrt{\frac{2}{a}} \exp[-j\chi_{no}z] \sin \frac{n\pi x}{a} \quad (10-1)$$

$$\underline{H}_t(r) = -X_0 \sum_{n=1,3,\dots} \frac{C'_n}{Z_{on}} \sqrt{\frac{2}{a}} \exp[-j\chi_{no}z] \sin \frac{n\pi x}{a} \quad (10-2)$$

단면방향의 파수 K_{in}, K'_{in} 및 전파방향에 대한 파수 χ_n 은 자유공간과 유전체사이의 경계면에서의 연속성을 이용하여 구하는데 그 결과식은 아래와 같다.

$$\frac{\tan K_{in} d}{K_{in}} = \frac{\cot K'_{in} \frac{t}{2}}{K'_{in}} \quad (11-1)$$

$$K'_{in} = K_{in} + K_o^2 \epsilon_r (1-j\tan\delta) \quad (11-2)$$

한편 미지수 C_n, D_{1n}, D_{2n} 및 C'_n 는 아래의 행렬방정식으로부터 구해진다.

$$(\sqrt{2}) \sum_{n=1,3,\dots} \left[\left(1 + \frac{Z_{om}}{Z_{on}}\right) D_{1n} + \left(1 - \frac{Z_{om}}{Z_{on}}\right) D_{2n} \right] P_n = \delta_{n1} \quad (12-1)$$

$$\sum_{n=1,3,\dots} \left\{ \left(\frac{1}{Z_{om}} - \frac{1}{Z_{on}}\right) \exp[-j\chi_n t] D_{2n} + \left(\frac{1}{Z_{om}} + \frac{1}{Z_{on}}\right) \right.$$

$$\left. \exp[j\chi_n t] D_{2n} \right\} P_n = 0 \quad (12-2)$$

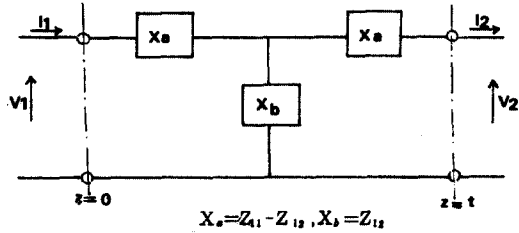
단, $P_n = \int_0^a e_n(x) e_n(x) dx$

(2) 동가 Z-Parameter

일반적인 회로이론에서 매질이 균일하고 등방성이면 가역정리가 성립하며 삽입된 유전체의 대칭성으로부터

$$Z_{11} = Z_{22}, Z_{21} = Z_{12} \dots \dots \dots (13)$$

이 관계식으로부터 결국은 두개의 Z-parameter로 등가 T-회로를 구현할 수가 있다.



<그림 2> 등가 T회로
<Fig. 2> Equivalent T-network for discontinuity

등가 Z-parameter의 variational formula를 구하기 위해서 우선

(i) 유전체를 중심으로 양쪽에서 같은 크기의 H₁₀모드가 입사한다고 가정하면
 $Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = Z_{11} + Z_{12} \dots \dots \dots (14-1)$

(ii) 크기는 같고 부호가 서로 반대인 H₁₀모드가 입사한 경우에는
 $Z_{in} = Z_{11} - Z_{12} \dots \dots \dots (14-2)$

가 되므로 식 (14)를 구하면 된다.

식 (2-1)과 식 (6-1)로부터 $z=0$ 에서
 $V_1 = 1 + C_1 \dots \dots \dots (15-1)$

$I_1 = (Z_{11} + Z_{12})^{-1} V_1 = \frac{1-C_1}{Z_{01}} \dots \dots \dots (15-2)$

유전체에 유기된 단면성분파를 $z=0$ 에서 $\epsilon(x)$ 라하고 식(6)에 대해 $\epsilon(x)$ 를 곱하여 유전체 물질에 대하여 적분하여 양변을 $(\int_0^a \epsilon(x) e_1(x) dx)^2$ 으로 나누면

$$(Z_{11} + Z_{12})^{-1} = j \frac{(\int_0^a \epsilon(x) \epsilon(x') G_1(x|x') dx dx')}{(\int_0^a \epsilon(x) e_1(x) dx)^2} \dots \dots \dots (16-1)$$

$$G_1(x|x') = j \sum_{n=1,3,5,\dots} e_n(x') e_n(x) Y_{0n} + \sum_{n=1,3,5,\dots} Y_{0n}' e_n'(x') e_n(x) \cdot \tan \chi_n \frac{t}{2}$$

$$(Z_{11} - Z_{12})^{-1} = -j \frac{(\int_0^a \epsilon(x) \epsilon(x') G_2(x|x') dx dx')}{(\int_0^a \epsilon(x) e_1'(x') dx)^2} \dots \dots \dots (16-2)$$

$$G_2(x|x') = j \sum_{n=1,3,5,\dots} Y_{0n} e_n(x') e_n(x) + \sum_{n=1,3,5,\dots} Y_{0n}' e_n'(x') e_n(x) \cdot \cot \chi_n \frac{t}{2}$$

단, $P_{mn} = \int_0^a e_m'(x) e_n(x) dx$

$$e_n'(x) = \frac{W_n}{K_n'} \cdot \frac{\cos K_n d}{\sin \frac{K_n t}{2}} \cos K_n'(x-a/2)$$

$$e_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}$$

유전체의 내부에 존재하는 전계모드 전개식으로 근사하여 식 (16)에 대입하여 정리하면

$$(Z_{11} + Z_{12})^{-1} \sum_{n=1,3,5,\dots} \sum_{r=1,3,5,\dots} P_{n1} P_{r1} D_r = \sum_{n=1,3,5,\dots} \sum_{r=1,3,5,\dots} D_r D_r$$

$$\left(\sum_{n=3,5,7,\dots} Y_{0n} P_{n1} P_{r1} + \frac{2}{4} \sum_{n=1,3,5,\dots} Y_{0n} \tan \chi_n \frac{t}{2} \cdot \delta_{nr} \right) \dots \dots \dots (17)$$

$(Z_{11} + Z_{12})^{-1}$ 가 ϵ 의 임의의 변화에 대해서 안정하려면 계수 D_r 에 대한 편미분에 0이 되어야 하므로 이 사실을 위의 (17)식에 적용하고 r 를 M 까지 제한하면

$$\sum_{n=1,3,5,\dots}^M \left\{ (Z_{11} + Z_{12})^{-1} P_{n1} P_{r1} - g_{1nr} \right\} D_r = 0 \dots \dots \dots (18-1)$$

단, $g_{1nr} = \sum_{n=3,5,7,\dots} Y_{0n} P_{n1} P_{r1} + \frac{2}{4} \sum_{n=1,3,5,\dots} Y_{0n} \tan \chi_n \frac{t}{2} \delta_{nr}$

$$\sum_{n=1,3,5,\dots}^M \left\{ (Z_{11} - Z_{12})^{-1} P_{n1} P_{r1} - g_{2nr} \right\} D_r = 0 \dots \dots \dots (18-2)$$

단, $g_{2nr} = \sum_{n=3,5,7,\dots} Y_{0n} P_{n1} P_{r1} + \frac{2}{4} \sum_{n=1,3,5,\dots} Y_{0n} \cot \chi_n \frac{t}{2} \delta_{nr}$

따라서 이 행렬 방정식으로부터 $(Z_{11} + Z_{12})^{-1}$ 및 $(Z_{11} - Z_{12})^{-1}$ 를 구하면 Z_{11} 과 Z_{12} 를 각각 구할 수가 있다.

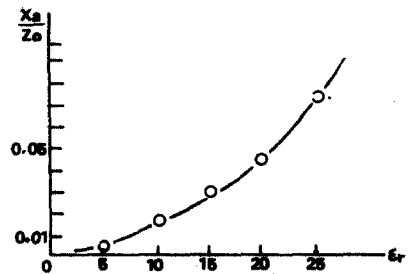
3. 결과 및 고찰

실제로 유전체 주위에 존재하는 고차 모드 산란파는 모드가 높을수록 급격히 감쇠하므로 모드의 수를 유한한 값으로 근사시킬 수가 있다.

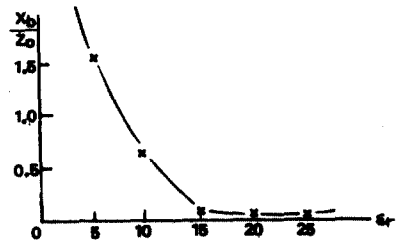
사용된 도파관의 크기, 유전체의 크기 및 주파수를 아래에 나타내었다.

$a = 23\text{mm}$ $b = 11.5\text{mm}$ $t = 5\text{mm}$ $f = 9.0\text{GHz}$

등가 Z-Parameter는 계산상의 편의를 위해 손실이 없는 유전체를 예로들어 계산했으며 아래 그림과 같다.



3 - a



3 - b

<그림 3> 등가 Z-parameter
<Fig. 3> Equivalent normalized Z-parameter for the variation of ϵ_r .

4. 결 론

유전체가 대칭적으로 유한하게 채워진 도파관의 전자계분포 및 등가 Z-parameter를 모드 전개이론과 variational principle을 써서 구해보았다. 그 결과식으로부터 유전체 물질의 유전상수에 따른 등가 parameter의 변화를 조사해 보았다(그림 3 참조).

위의 결과를 이용하여 구해진 전자계 분포를 이용하여 손실계수와 유전체내에서의 열분포등을 구하는 문제는 다음으로 미룬다.

참 고 문 헌

- 1) R.E. Collin, "Field Theory of Guided Waves", McGraw - Hill, 1960.
- 2) S.K. Chatterjee and R. Chatterjee, "Dielectric Loaded Waveguides - A Review of Theoretical Solutions", The Radio Electronic Engineer, September, 1965.
- 3) P.H. Vartanian, W.P. Ayres, and A.L. Helgesson, "Propagation in Dielectric Slab Loaded Rectangular Waveguide ", IRE Trans. Vol, MTT-6, pp. 215-222, April, 1958.
- 4) R. Seckelmann, "Propagation of TE modes in Dielectric Loaded Waveguides ", IEEE Trans. Vol. MTT-14, No.11, pp. 518-527, November, 1966.
- 5) L.M. Liu E.J. Rosenbaum, and W.F. Pickard, "Electric-Field Distribution Along Finite Length Lossy Dielectric Slabs in Waveguide", IEEE Trans., Vol. MTT-24, pp. 216-219, April, 1976.
- 6) R.E. Collin, "Field Theory of Guided Waves", McGraw-Hill, 1960. P.244.
- 7) Leopold B. Felsen, "Radiation and Scattering of Waves", prentice-Hall, Inc., Englewood cliffs, New Jersey, 1973. pp. 185-190.