하계학술회의
논문85-2-8

Reduced Order 적응관측자를 이용한 적응제어계의 구성에 관한 연구
(On a Configuration of a MRACS by Reduced Order Adaptive Observer)

이 순 영 한양대학교
김 홍 필 "
이 병 호 "

1. 서론

일반적으로 우수한 성능을 갖는 제어계를 구성하기 위해서는, 플랜트의 특성을 나타내는 파라미터와 상태들에 대한 정확한 정보를 알아야 한다. 그러나 실제의 경우에 있어서 플랜트 파라미터들의 대부분은 미지이거나 시간에 따라 변화하는 경우가 많다. 또한 상태변수들도 직접측정할 수 있는것은 아니므로 이러한 경우에 단지 플랜트의 입출력 정보만을 이용하여 미지파라미터를 식별하고, 동시에 측정 불가능한 상태변수들을 추정하는 적응 관측자를 구성할 필요가 있다.

본 논문에서는 적응속도가 빠르며, 구조가 보다 간단한 적응제어계를 계산기로 실현시키기에 용이한 이산시간계로 구성하고자 한다. 먼저 관측자 구성시에는 플랜트를 비최소차로 실현시켜 안정화 신호를 필요없게 하고, 상태변수필터의 차수도 플랜트의 차수보다 1차 작게하였다.[1][2] 또한 상태 추정과정과 식별과정을 분리 구성하였으며, 상태추정과정에 있어서는 관측자의 차수를 플랜트의 차수보다 1차작은 reduced-order로 구성시킴으로써, 전체계의 구조를 간단히 하였다.[2,3]

파라미터 식별과정에서는 플랜트의 계수가 미지인 상수계수뿐 만아니라, 시간에 따라 서서히 변하는 경우에도 적용가능하도록, 현재의 정보에 더 크게 지수적으로 하중을 준 최소자승법을 기본으로 해서 유도되는 반복식을 사용하였다.[5]

이와 같이 구성된 적응관측자를 사용하여 간접법으로 적응제어계를 구성하여 보았다.

2. 파라미터 식별

다음과 같은 전달관계를 갖는 플랜트를 생각한다.

$$G(Z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{b_1 z^{n-1} + b_2 z^{n-2} + \cdots b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots\cdots a_n} = \frac{N(z)}{D(z)} \quad (1)$$

여기서 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \cdots\cdots a_n)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \cdots\cdots b_n)$는 미지파라미터 벡터이며, D(Z)와 N(Z)는 서로 소인 Hurwitz 다항식이다.

이제 플랜트를 비최소차 실현시키기 위하여 다음과 같은 임의의 다항식 f(z)를 생각하자.

1) $f(z) = z^{n-1} + f z^{n-2} + \cdots\cdots f_n$

2) 다항식 f(z)의 특성근은 단위원내에 존재한다.

이 다항식 f(z)로 플랜트 전달함수의 분모 및 분자를 나누어 zY(z)를 구하면 다음과같이 표현할 수 있다.

$$zY(z) = \alpha_1 y(z) + \sum_{j=2}^{n} \frac{\alpha_j z^{n-j}}{f(z)} y(z) + \beta_1 u(z) + \sum_{j=2}^{n} \frac{\beta_j z^{n-j}}{f(z)} u(z) \quad (2)$$

여기서 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2 \cdots\cdots \alpha_n)^T$ 및 $\beta = (\beta_1, \beta_2 \cdots\cdots \beta_n)$는 식(1)의 미지파라미터 벡터 $\mathbf{a}$ 및 $\mathbf{b}$에 일대일로 대응됨을 알수 있다. 따라서 입력 u 및 출력 y만을 알고 있다는 가정하에 이 값들을 사용하여 미지 파라미터 벡터 α 와 β 를 식별해야 한다.

이를위하여 입 출력측의 상태변수 필터를 다음과같이 정의 한다.

$$\phi_{1j}(z) = \frac{z^{n-j}}{f(z)} u(z) \qquad \phi_{2j}(z) = \frac{z^{n-j}}{f(z)} y(z) \quad (3)$$

$$j = 2, 3, \ldots\ldots n$$

식(2)에 상태변수필터식 (3)의 관계를 사용하면 다음과같은 플랜트의 비최소차 실현식을 얻을 수 있다.

$$X(k+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \mathbf{p}_1^T & \mathbf{p}_2^T \\ h & F^T & 0 \\ 0 & 0 & F^T \end{bmatrix} X(k) + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ 0 \\ h \end{bmatrix} u(k) \quad (4)$$

$$y(k) = C X(k)$$

위 비최소 실현으로 부터 Y(k+1)은

다음과같이 된다.

$$y(k+1) = \alpha_1 y(k) + p_1^T \phi_1(k) + p_2^T \phi_2(k) + \beta_1 u(k) \quad (5)$$

이제 파라미터 식별을 위해 식(4)와 같은구조를 갖는 적응관측자 모델을 구성한다.

$$\tilde{y}(k+1) = -\sigma \tilde{y}(k) + (\hat{\alpha}_1(k)+\sigma)y(k) + \hat{p}_1^T \phi_1(k) + \hat{p}_2^T(k)\phi_2(k) + \hat{\beta}_1(k)u(k) \quad (6)$$

여기서 σ는 ($|\sigma|<0$)인 임의의 상수이다. 또한 $\hat{p}_i(k)$ ($i=1, 2$)는 적응알고리즘에 의해서 결정되는 가변파라미터 벡터들이며, $\phi_i(k)$ ($i=1, 2$)는 상태변수필터의 출력들 이므로 이들의 곱으로 표현되는 출력 $\tilde{y}(k)$ 도 측정 가능하다. 그러므로 식(5)와 식(6)으로부터 적응관측자 모델과 플랜트 사이의 출력오차를 구하면 다음과 같이된다.

$$e(k+1) = \tilde{y}(k+1) - y(k+1) = -\sigma e(k) + \theta^T(k)\psi(k)$$

$$\theta(k) = [\hat{\alpha}_1(k)-\alpha_1,\ \hat{\beta}_1(k)-\beta_1,\ \hat{p}^T(k) - p^T]^T \quad (7)$$

$$\psi(k) = [y(k),\ u(k),\ \phi^T(k)]^T$$

따라서 식별문제는 $k \to \infty$로 감에따라 $\theta(k) \to 0$가 되도록 하는 적응알고리즘을 구하는 문제로 귀결된다.

이를위하여 다음과 같이 지수적으로 하중을 준 평가함수를 생각한다.

$$J(k) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k} [\lambda^{k-j}(-\sigma e(j) + \theta^T(k)\psi(j))]^2 \quad (8)$$

단 $0<\lambda<1$ $|\sigma|<1$

파라미터오차 $\theta(k)$는 평가함수 $J(k)$가 각각의 k에서 최소가되도록 결정되어야한다. 따라서 이와같은 $\theta(k)$는 $\frac{\partial J(k)}{\partial \theta(k)}=0$ 조건으로부터 다음과 같이 구해진다.

$$\theta(k) = \Gamma(\lambda,k)\Psi(\lambda,k)e(\lambda,k) \quad (9)$$

여기서

$$\Gamma(\lambda,k) = [\Psi(\lambda,k)\Psi^T(\lambda,k)]^{-1} \quad (10)$$

$$\Psi(\lambda,k) = [\lambda^{k-1}\psi(1)\ \lambda^{k-2}\psi(2)\ \cdots\cdots\ \psi(k)]$$

$$e(\lambda,k) = \sigma[\lambda^{k-1}e(1)\ \lambda^{k-2}e(2)\ \cdots\ e(k)]^T$$

식(9)로부터 $\theta(k)$를 구하기 위해서는 식(10)의 역행렬을 각k에서 계산하지 않으면 안된다. 따라서 파라미터를 추정하는 계산시간이 길어지므로 역행렬 보조정리를 이용한 다음과 같은 반복식을 사용함으로써 이와 같은 문제는 피할 수 있다. [6]

$$\theta(k+1) = \theta(k) - \Gamma(\lambda,k+1)\psi(k+1)e(k+1) \quad (11)$$

$$\Gamma(\lambda,k+1) = \frac{\Gamma(\lambda,k)}{\lambda^2} - \frac{\frac{\Gamma(\lambda,k)}{\lambda^2}\psi(k+1)\psi^T(k+1)\frac{\Gamma(\lambda,k)}{\lambda^2}}{1+\psi^T(k+1)\frac{\Gamma(\lambda,k)}{\lambda^2}\psi(k+1)} \quad (12)$$

3. 상 태 추 정

식(1)로 주어진 플랜트의 전달관계식에서 $D(z)$와 $N(z)$는 서로 소의 관계를 만족하므로 플랜트는 가제어하며 가관측하다. 따라서 플랜트는 다음과 같은 가관측 표준형으로 실현될 수 있다.

$$X(k+1) = \left[\begin{array}{c|c} -a & \begin{array}{c} I_{n-1} \\ \hline 0 \end{array} \end{array}\right] x(k) + b\,u(k) \quad (13)$$

$$y(k) = c^T x(k) \qquad c^T = [1, 0\ 0 \cdots\cdots 0]$$

위 식의 상태 $X(k)$는 n차 벡터이나 $X1(k)$는 출력 $y(k)$로 부터 직접 얻을 수 있으므로 차수를 $n-1$차로 줄인 상태추정자를 구성할 수 있다.

이와같은 상태추정자를 구성하기 위하여 미지플랜트를 식(13)에서 다음과 같은 변환행렬 T를 도입한다.

$$X = T\bar{X} \quad (14)$$

여기서

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \bar{a}_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \bar{a}_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \bar{a}_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

그러면 식(1)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_1(k+1) \\ \hline \bar{x}_2(k+1) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \bar{a}_1 - a & 1\ 0 \cdots\cdots 0 \\ \hline p_1 & A_1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ \hline x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \hline p_2 \end{bmatrix} u(k) \quad (15)$$

$$y = [1, 0, \cdots\cdots 0]x$$

위의 변환행렬 원소의 값 $\bar{a}$는 T가 정칙이 되도록 임의로 가정될 수 있는 값이므로 $\bar{a} = f_{j+1}$ 로 정의할 수 있다.

따라서 식(15)는 다음과 같은 $n-1$차의 상태방정식으로 표현될 수 있다.

$$\bar{X}(k+1) = F\bar{x}(k) + p_1 y(k) + p_2 u(k) \quad (16)$$

이제 다음과 같은 차분방정식의 해로서 $(n-1) \times (n-1)$행렬 $S_i(k)$ ($i=1, 2$)를 정의 해 보자.

$$S_i(k+1) = FS_i(k) + I_{n-1}v_i(k)\ ;\ S_i(0)=0 \quad (17)$$

$$v_1(k) = y(k) \qquad v_2(k) = u(k)$$

따라서 식(17)의 해를 구하면 다음과 같다.

$$S_i(k) = \sum_{j=0}^{k-1} F^{k-j-1} v_i(j) \quad (18)$$

$S_i(k)$와 F는 교환법칙 즉 $S_i(k)F = FS_i(k)$이 성립 한다.

행렬 $S_i(k)$를 이용하면 식(16)의 해는 다음처럼 된다.

$$\bar{X}(k) = S_1(k)p_1 + S_2(k)p_2 + F^k\bar{x}_0 \quad (19)$$

식(19)에서 알 수 있는 바와같이 플랜트의 파라미터와 필터의 출력을 선형조합하므로서 플랜트의 출력 $y(k)$를 제외한 나머지 $(n-1)$개의 상태들을 추정할 수 있다.

4. 적응제어계의 구성

이제 앞에서 제안한 적응관측자를 이용하여 간접법으로 기준모델 적응제어계를 구성해 본다.

식(2)의 계통을 $y(k)$에 대한 차분방정식으로 표현하면 다음과 같다.

$$y(k)=\sum_{j=1}^{n} a_j y(k-j)+\sum_{j=1}^{n} b_j u(k-j) \qquad (20)$$

식(20)에 대응해서 다음과 같은 기준모델을 생각할 수 있다.

$$y_M(k)=\sum_{j=1}^{n} a_{Mj} y_M(k-j)+\sum_{j=1}^{n} b_{Mj} r(k-j) \qquad (21)$$

여기서 $y_M(k)$는 모델의 출력이고 $r(k)$는 기준 입력이다. 그리고 a_{Mj}와 b_{Mj}는 기준모델이 입력 $r(k)$에 대하여 안정하고 바람직한 응답을 갖도록 지정되어야 할 상수파라미터들 이다.

이제 고려 할 문제는 적응관측자로부터 얻어진 플랜트 파라미터를 이용하여 플랜트 출력 $y(k)$가 모델출력 $y_M(k)$에 일치하도록 하는 제어입력 $u(k)$를 합성하는 것이다.

여기서 제어입력 $u(k)$가 유한하기 위해서는 다음과 같은 가정이 필요하다.

1) $b_1 \geq b_{min} > 0$ 여기서 b_{min}는 기지의 상수이다.

2) 플랜트의 모든 영점은 Z평면상의 단위원내에 존재 해야 한다.

식(20)과 식(21)을 이용하여 플랜트 출력과 기준모델의 출력사이의 오차 $e_c(k)=y_M(k)-y(k)$을 구하면

$$e_c(k)=\sum_{j=1}^{n} a_{Mj} e_c(k-j)+w(k) \qquad (22)$$

$$w(k)=\sum_{j=1}^{n} (a_{Mj}-a_j)y(k-j)+b_{M1}r_M(k-1)-\sum_{j=1}^{n} b_j u(k-j)$$

여기서 $r_M(k-1)=\left(\sum_{j=1}^{n} b_{Mj} r(k-1)\right)/b_{M1}$ (23)

$y(k)$가 $y_M(k)$와 일치 되도록 하기위해서는 $w(k)=0$를 만족하도록 하는 제어입력 $u(k)$를 합성하면 된다.

그러나 그러한 $u(k)$는 플랜트 a_j와 b_j를 알 수 없으므로 구할 수 없다. 따라서 다음과 같이 적응관측자로부터 얻어진 추정치 $\hat{a}_j(k)$와 $\hat{b}_j(k)$를 이용하여 적응적으로 $u(k)$를 구한다.

$$u(k)=\sum_{j=1}^{n} g_j(k)y(k-j+1)+g_{n+1}(k)+g_{n+1}(k)r_m(k)+\sum_{j=2}^{n} g_{n+j}(k)u(k-j+1) \qquad (24)$$

여기서 $g_j(k)=\dfrac{a_{Mj}-\hat{a}_j(k)}{\hat{b}_1(k)}$ $j=1,2,\cdots n$

$g_{n+1}(k)=b_{M1}/\hat{b}_1(k)$

$g_{n+j}(k)=-\hat{b}_j(k)/\hat{b}_1(k)$ $j=2,3\cdots n$

식(35)로 부터 만일 기준입력 $r(k)$가 충분히 일반적 이라면. 제어이력 $u(k)$도 일반적이고. 따라서 추정치 $\hat{a}_j(k)$와 $\hat{b}_j(k)$는 각각 a_j와 b_j로 수렴되고. 결과적으로 $w(k)$는 0으로 되고 $e(k)\to 0$ 즉, $y(k)\to y_M(k)$으로 된다.

5. 결론

본 논문에서는 적응관측자 구성시 플랜트를 비최소차로 실현시킴으로써 안정화 신호를 필요 없게하고. 파라미터 식별은 지수적인 하중을 준 최소자승법을 기본으로한 적응알고리즘을 사용 함으로써 응답속도를 개선하였다. 상태추정자는 플랜트 차수보다 1차 작은 reduced-order로 구성시켰고. 필터의 차수도 1차 작게 함으로써 전체 적응구조를 간단히 하였다.

또 이렇게 구성된 적응관측자를 이용하여 간접법으로 제어계를 구성하였으며. 디지틀계산기 시뮬레이션을 통하여 그 타당성을 확인 하였다.

참 고 문 헌

1. G.Luders & K.S.Narendra; "A New Canonical Form for an Adaptive Observer", IEEE Trans. Auto. Cont. Vol. AC-19-2, pp.117-119,1974
2. G.Kreisselmeier;" An Adaptive Observer with Exponential Rate of Convergence", IEEE Trans. Auto. Cont. Vol. AC-22, pp.2-8,1977
3. S.Nuyan & R.L.Carroll;"Minimal Order Arbitrary Fast Adaptive Observer and Identifiers", IEEE Trans. Auto. Cont., Vol. AC-24-2, pp.289-297, 1979
4. K.Ichikawa;"Principle of Luders-Narendra's Adaptive Observer", INT. J. Cont., Vol.31, No.2, pp.351-365, 1980
5. T.Suzuki;"& T.Nakamura;"& M.Koga;"Discrete Adaptive Observer with Fast Convergence", INT.J. Cont., Vol.31, No.6,pp.1107-1119, 1980
6. L. Ljung & T.Sonderstrom;"Theory and Practical of Recursive Identification", The MIT Press, 1983