하계학술회의
논문85-2-5

Walsh series 확장에 의한 선형 Distributed Parameter System 의 해석에 관한 연구

A Study on Analysis of Linear Distributed Parameter Systems via Walsh series Expansions

안 두 수 성 대 전기공학과
심 재 선 삼척공전 전기공학과
이 명 규 성 대 전기공학과

1. 서 론

근래에 Lumped parameter system 의 Identification에 Walsh를 이용한 새로운 접근 방법이 응용되고 있다(1,2) 또한 Lumped parameter controller 와 Observer 의 Design 에도 Walsh 함수가 이용되고 있다.(3,4)

Paraskevopoulos 는 선형편미방으로 표현되는 Distributed parameter system(DPS) 에서, 편미방을 적분 방정식으로 변환하고 Walsh 함수를 이용하여, Parameter 와 초기·경계 조건을 Identify 하는 문제를 해결하였다.(5)

본 연구에서는 DPS 에의 적용을 위해 Walsh 함수가 어떻게 확장이 되는가를 살펴보고, Double Walsh series의 적용 기법과 Least square 와 Galerkin scheme 에 대한 Walsh series 의 적용 기법을 고찰한다.

2. Double Walsh series Approach

임의의 함수 $y(t);t\in(0,1)$는 Walsh series 로 다음과 같이 전개된다.

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i \phi_i(t) \qquad (1)$$

$$y_i = \int_0^1 y(t)\phi_i(t)dt$$

$\phi_i(t)$: Walsh 함수

2개의 변수를 갖는 함수 $y(x,t);x,t\in(0,1)$를 Double Walsh series M,N term 으로 전개하자.

$$\bar{y}(x,t) \doteq \sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=0}^{N-1} y_{ij}\phi_i(t)\varphi_j(x)$$

$$\doteq \Phi_M^T(x) Y_{MN} \Phi_N(t) \qquad (2)$$

$$\Phi_M^T(x) = [\varphi_0(x), \varphi_1(x) \cdots\cdots \varphi_{M-1}(t)]$$

$$\Phi_M^T(t) = [\phi_0(t), \phi_1(t) \cdots\cdots \phi_{N-1}(t)]$$

함수의 적분과 Operational mat.는 다음의 관계가 있다.(5)

$$\underbrace{\int_0^x\cdots\int}_{\ell번}\underbrace{\int_0^t\cdots\int}_{m번} \Phi_M^T(x) Y_{MN}\Phi_N(t)\, \underbrace{dt\cdots dt}_{m번}\, \underbrace{dx\cdots dx}_{\ell번}$$

$$= \Phi_M^T(x)(P_M^T)^{\ell} Y_{MN} P_N^m \Phi_N(t) \qquad (3)$$

$$P_m = \left[\begin{array}{c|c} P_{m/2} & -\frac{1}{2m} I_{m/2} \\ \hline \frac{1}{2m} I_{m/2} & O_{m/2} \end{array}\right] \qquad P_1 = \frac{1}{2}$$

초기·경계조건 $\bar{y}(x,0)$, $\bar{y}(0,t)$를 표현해 보자.

$$\bar{y}(0,t) \doteq \sum_{i=0}^{M-1} C_i \Phi_M^T(x) E_{1,i+1} \Phi_N(t)$$

$$\bar{y}(x,0) \doteq \sum_{i=1}^{N-1} b_i \Phi_M^T(x) E_{i+1,1} \Phi_N(t) \qquad (4)$$

E_{ij} 는 ij 번째 요소만이 1이고 나머지 요소들은 모두 0인 M×N matrix 이다.

다음으로 주어지는 DPS 를 고려해 보자.

$$a_2 \frac{\partial}{\partial t} y(x,t) + a_1 \frac{\partial}{\partial x} y(x,t) = u(x,t) \qquad (5)$$

위 식을 X 와 t 에 대하여 각각 한 번씩 적분하고 식(1)-(4)의 관계를 이용하면 다음과 같다.

$$[a_2 P_M^T Y_{MN} + a_1 Y_{MN} P_N - a_2 \sum_{i=0}^{M-1} b_i P_M^T E_{i+1,1} - a_1 \sum_{i=0}^{N-1} C_i E_{1,i+1} P_N]$$

$$= [P_M^T U_{MN} P_N] \qquad (6)$$

위 식에서 식(2)에서의 미지의 Matrix 인 Y_{MN} 이 결정된다.

3 . Walsh-Galerkin Expansion Approach

Galerkin scheme 에 Walsh series 를 도입하자. (6)

$$\bar{y}(x,t) = \sum_{i=1}^{m} Z_i(t)\varphi_i(x)$$

$$(\dot{z}_i(t) = C_i^T \phi(t)) \qquad (7)$$

$$\bar{u}(x,t) = \sum_{i=1}^{m} U_i(t)\varphi_i(t) \qquad (8)$$

$\varphi(x)$: orthogonal basic function

$\phi(t)$: Walsh function

식(5)로 주어진 DPS 에 식(7),(8)의 함수들로 Approximation하면 Error 가 발생한다.

$$E_q(x,t) = a_2 \frac{\partial}{\partial x}\bar{y} + a_1 \frac{\partial}{\partial t}\bar{y} - \bar{u}(x,t) \qquad (9)$$

$Z_i(t)$는 Basic function 과 Error 가 Orthogonal 하도록 결정한다. 즉,

$$\int E_q^T(x,t)\varphi_i(x)\,dx = 0 \qquad (10)$$

위 두 식에서 다음의 관계를 알수 있다.

$$a_2 F\dot{Z}(t) = -a_1 G Z(t) + F U(t) \qquad (11)$$

$$Z_i(t) = C_i^T P_m \phi(t) + C_i^T(0)\phi(t) \qquad (12)$$

$$F = \left[\int \varphi_j^T(x)\varphi_i(x)\,dx\right]$$

$$G = \left[\int \left[\frac{\partial}{\partial x}\varphi_j(x)\right]^T \varphi_i(x)\,dx\right]$$

식(11),(12)에서 식(7)의 미지의 Vector 인 C_i^T 가 결정된다.

4 . 고 찰

다음의 예를 보자.

$$\frac{\partial}{\partial x}y(x,t) + \frac{\partial}{\partial t}y(x,t) = u(x,t)$$

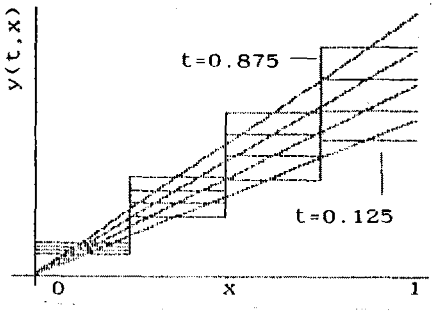
$$y(0,t) = 0$$

$$y(x,0) = x$$

$$u(x,t) = x + t + 1$$

그림은 Double Walsh series기법으로 구한 해이다.

Double Walsh series에의한 접근 방법에서는 $\bar{y}(x,t)$ 가 다음과 같이 결정된다.



그 림-1

$$\bar{y}(x,t) = \sum_{j=0}^{M}\sum_{i=0}^{N} y_{ij}\,\phi_i(t)\varphi_j(x)$$

$$\text{즉}\quad \bar{y}(x,t) = \sum_{j=0}^{M} y_j(t)\varphi_j(x)$$

$$y_j(t) = D_j^T \phi(t)$$

D_i^T 는 다음의 Functional 즉 Least square error 가 최소가 되도록 결정한다.

$$J = \int E_D^T E_D\,dx$$

$$E_D(x,t) = \bar{y}(x,t) - \sum_{j=0}^{M} y_j(t)\varphi_j(x)$$

그런데 Galerkin scheme에 대한 Walsh Series의 접근 방법에서는

$\dot{y}_i(t) = C_j^T \phi(t)$ 이고 C_j^T 는 Basic function 과 Error 가 Orthogonal 하도록

즉, $\int E_q^T \varphi_i(x)dx = 0$ 으로 하는 값으로 결정된다.

5. 결 론

본 연구에서는 DPS 의 해석을 위한Double Walsh 를 이용한 접근 방법과 Galerkin scheme 에 대한 Walsh series 의 적용 기법을 비교.고찰하였다.

참 고 문 헌

1.Chen & ,Pro.Intrn.elec.Eng. 565-, '75
2.Rao & , 1160-, "
3.Chen & ,IEEE Trans AC-20, 596-,'75
4.Chen & ,J.Franklin Inst. 300.265-,'75
5.Paraskevopoulos, Int.J.Syst.Science 9(1),75-,'78
6.Peter, IEEE Trans AC-20, 75-, '75
7.Tzafestas,Pro-IEEE AC-Pt.I,201-, '83