

유한요소법에 있어서의 비선형자기해석방법의 비교연구
A Study on the Comparison of Nonlinear Analyses
for Magnetic Field in the FEM

임 달 호 (한양대)
김 찬 오 (한양대)
신 흥 고* (한양대)

1. 서론

이제까지 국내에서 발표된 유한요소법에 의한 전기기기의 자기적 특성 해석방법은 일반적으로 자속분포의 양상만을 고려하기 위하여 철심에서의 자기포화율을 무시하고 선형으로 가정하여 해석을 한 경우가 대부분이었다.

그러나 이러한 선형해석의 경우에서 얻은 결과는 이론적인 면과 잘 일치하지 않고 또한 정확한 해와 상당한 차이가 있어, 실제의 전기기기 해석분야나 설계분야에서는 적용하기가 곤란한 점이 많았다.

근년에 들어와 일부 대학에서 정확한 자기적 특성을 얻기 위하여 유한요소법에 비선형 해석을 적용하기 시작하였으며 앞으로 이에 대한 연구가 활발하게 진행될 것으로 전망된다.

이러한 관점에서 본 연구에서는 우선 전기기기 중에서 변압기를 해석모델로 하고 유한요소법을 적용하여 비선형 개방장식을 유도하였으며, 이 비선형방정식을 푸는 방법으로서 세계적으로 가장 널리 사용되고 있는 Newton-Raphson 법과 국내에서 제시된 直接收斂法(Direct Convergence Method)을 각각 적용하여 수렴회수와 수렴속도 및 정확도등에 대해 비교, 검토하였다.

그 결과 자기적 특성을 해석하는데 있어서는 국내에서 제시된 직접수렴법이 Newton-Raphson 법에 비해 상당히 우수한 방법이라는 것을 입증하였고, 또 Newton-Raphson 법에서도 일반적으로 여러 논문에서 제시된 것과는 달

리 자화곡선을 표현하는 방법으로서 $\nu - B^2$ 곡선에 대한 cubic spline 법을 사용하는 것보다 $\nu - B$ 곡선에 대한 구간선형근사법(piecewise approximation)을 사용하는 것이 훨씬 더 효율적이라는 것도 밝혀 내었다.

2. 해석모델

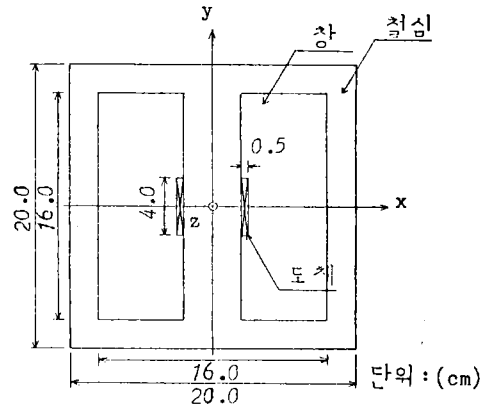


그림 1 해석모델

3. 유한요소법의 적용
비선형 Poisson 방정식

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial A}{\partial y} \right) = -J \quad (1)$$

에너지범함수

$$I = \iint_R \left(\int_0^B \nu b db - JA \right) dx dy \quad (2)$$

요소방정식

$$\frac{\partial I^e}{\partial A_q} = \frac{\nu_e}{4\Delta_e} \left[\sum_P (b_p b_q + c_p c_q) A_p \right] - \frac{\Delta_e}{3} J_e \quad (3)$$

비선형 계방정식

$$S \cdot A = F \quad (4)$$

4. 비선형 해석방법의 적용

4-1 직접수렴법 (Direct Convergence Method)¹⁾

$$1) S^{(k)} \cdot A^{(k)} = F \quad (S^{(k)} = S(V^{(k)})) \quad (5)$$

$$2) B^{(k)} = \nabla \times A^{(k)} \quad (6)$$

$$3) H^{(k)} = \nabla \cdot B^{(k)} \quad (7)$$

4) B-H 곡선상에서 $H^{(k)}$ 에 해당하는 $V^{(k+1)}$ 을 찾는 다. (본 연구에서는 B-H 곡선에 대해 구간선형근사법을 사용)

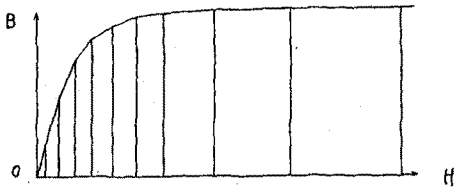


그림 2 B-H 곡선의 구간선형근사화

4-2 Newton-Raphson 법²⁾⁻⁷⁾

(1) 기본 Algorithm

$$1) A = A^{(k)} - \left[\frac{\partial S^{(k)} A^{(k)}}{\partial A^{(k)}} \right]^{-1} \{ S^{(k)} A^{(k)} - F \} \quad (8)$$

2) 요소 방정식의 재구성

$$- \left[\frac{\partial S_e^{(k)} A_e^{(k)}}{\partial A_e^{(k)}} \right] \{ A_e^{(k)} - A_e \} = S_e^{(k)} A_e - F_e \quad (9)$$

$$\left[\frac{\partial S_e^{(k)} A_e^{(k)}}{\partial A_e^{(k)}} \right] ; \text{ Jacobian matrix}$$

(2) 구간선형근사법 (Piecewise Approximation)

1) $V = V(B)$ 로 근사화

2) Jacobian matrix의 계산

$$\begin{aligned} \frac{\partial (V_e S_e A_e)}{\partial A_e} &= V_e^{(k)} \frac{\partial S_e^{(k)} A_e^{(k)}}{\partial A_e^{(k)}} + S_e^{(k)} A_e^{(k)} \frac{\partial V_e^{(k)}}{\partial A_e^{(k)}} \\ &= S_e^{(k)} + S_e^{(k)} A_e^{(k)} \left(\frac{\partial V_e^{(k)}}{\partial B_e} \right) \frac{\partial B_e^{(k)}}{\partial A_e^{(k)}} \\ &= S_e^{(k)} + S_e^{(k)} A_e^{(k)} \frac{b_1 \sum b_e A_p + c_1 \sum c_p A_r}{2 \Delta_e B_e^{(k)}} \left(\frac{\partial V_e^{(k)}}{\partial B_e} \right) \end{aligned} \quad (10)$$

3) $V-B$ 곡선의 구간선형근사화

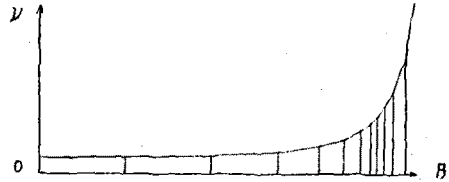


그림 3 V-B 곡선의 구간선형근사화

(3) 3 차근사법 (Cubic spline Method)^{3), 7)}

1) $V = V(B^2)$ 으로 근사화

2) Jacobian matrix의 계산

$$\begin{aligned} \frac{\partial (V_e S_e A_e)}{\partial A_e} &= S_e^{(k)} + S_e^{(k)} A_e^{(k)} \left(\frac{\partial V_e^{(k)}}{\partial B_e^2} \right) \frac{\partial B_e^{(k)}}{\partial A_e^{(k)}} \\ &= S_e^{(k)} + S_e^{(k)} A_e^{(k)} \frac{b_1 \sum b_e A_p + c_1 \sum c_p A_r}{2 \Delta_e^2 B_e^{(k)}} \left(\frac{\partial V_e^{(k)}}{\partial B_e^2} \right) \end{aligned} \quad (11)$$

3) $V-B^2$ 곡선의 3 차근사화

$$x = \frac{B^2 - B_1^2}{B_2^2 - B_1^2} \quad (12)$$

$$V(x) = (2x^3 - 3x^2 + 1)V(0) + (-2x^3 + 3x^2)V(1) + (B_2^2 - B_1^2)(x^3 - 2x^2 + x)V'(0) + (B_2^2 - B_1^2)(x^3 - x^2)V'(1) \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial B^2} &= \frac{(6x^2 - 6x)V(0)}{(B_2^2 - B_1^2)} + \frac{(-6x^2 + 6x)V(1)}{(B_2^2 - B_1^2)} \\ &+ (3x^2 - 4x + 1)V'(0) + (3x^2 - 2x)V'(1) \end{aligned} \quad (14)$$

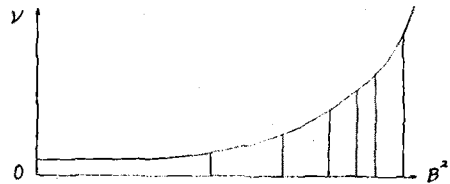


그림 4 V-B² 곡선의 3 차근사화

5. 계산처리과정 (그림5 참조)

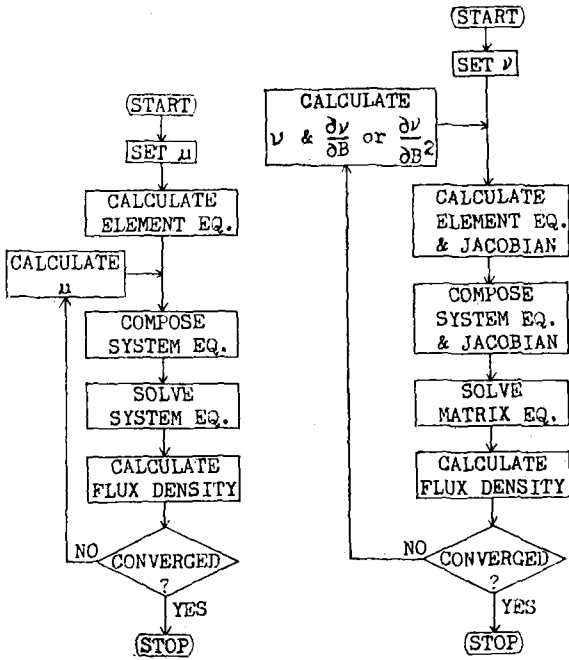
6. 계산결과

방법 1: 직접수렴법 (비선형비교수렴)

방법 2: 직접수렴법 (자속 밀도 비교수렴)

방법 3: Newton-Raphson법 (구간선형근사화법)

방법 4: Newton-Raphson법 (3 차근사법)



(a) 직접수렴법 (b) Newton - Raphson 법
그림 5 Flow Chart

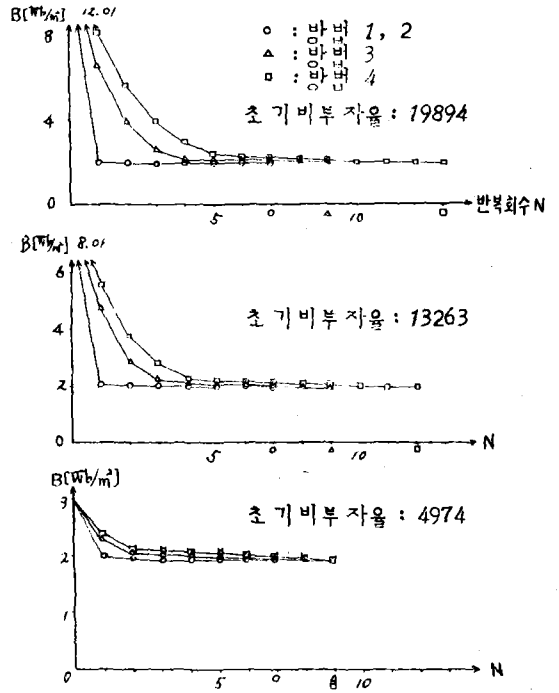


그림 6 초기비부자율 값에 대한 수렴곡선

(1) 초기비부자율에 대한 수렴회수 및 수렴시간 (비오차 1 (%)의 경우, ()속은 수렴시간, 단위 (초)임)

비부자율	19894	13263	4974
방법 1	7(1305.2)	7(1311.9)	7(1289.5)
방법 2	7(1292.4)	7(1285.3)	7(1278.9)
방법 3	9(1781.5)	9(1754.0)	9(1750.1)
방법 4	13(2314.1)	12(2239.1)	9(1876.9)

(2) 비오차에 대한 수렴회수 및 수렴시간 (초기비부자율 13263의 경우)

오차	5.0(%)	2.0(%)	1.0(%)
방법 1	3(771.3)	5(1098.9)	7(1311.9)
방법 2	3(777.7)	5(1102.3)	7(1285.3)
방법 3	8(1720.1)	9(1790.7)	9(1754.0)
방법 4	11(2216.8)	11(2231.5)	12(2239.1)

(3) 계산기 사용용량 (K-Byte)

방법 1	36.68
방법 2	36.26
방법 3	64.93
방법 4	65.61

7. 결론

유한요소법에 의해 비선형자기적특성을 해석하기 위하여 Newton-Raphson법과 직접수렴법을 적용하여본 결과, 초기부자율 값의 실험에 따라 Newton-Raphson법에서는 수렴회수가 변화한 반면, 직접수렴법에서는 변화가 없었고, 오차를 변화시키에 따라서도 많은 변화가 있었는데 특히 직접수렴법의 경우에는 단 한번의 반복 계산에서 수렴값 근처로 도달한다는 놀라운 결과를 보였으며, 전반적으로 Newton-Raphson 법보다는 수렴회수 및 시간면에서 훨씬 더 우수하였다.

또 Newton-Raphson법의 경우에도 $\nu - B^2$ 곡선에 대한 cubic spline법에 의해 자기포화특성을 표현하는 것보다 $\nu - B$ 곡선에 대한 구간선형근사화를 채택하는 것이 더 효율적이었음을 알 수 있었다.

8. 참고문헌

- 1) 임달호, 김찬오, "자기적비선형특성을 고려한 변압기자속분포의 유한요소해석에 관한 연구", 전기학회지, vol.32, no.12, pp.419-426, 1983.

- 2) P.Silvester, M.V.K.Chari, "Finite Element Solution of Saturable Magnetic Field Problems," IEEE Trans., vol.PAS-89, no.7, pp.1642-1651, 1970.
- 3) P.Silvester, H.S.Cabayan & B.T.Browne, "Efficient Techniques for Finite Element Analysis of Electric Machines," IEEE Trans., vol.PAS-92, no.4, pp.1274-1281, 1973.
- 4) O.C.Zienkiewicz, "The Finite Element Method," (Book) McGraw-Hill Book Company(UK) Ltd., 1972.
- 5) J.T.Oden, "Finite Elements of Non-linear Continua," McGraw-Hill Book Company, New York, 1972.
- 6) C.F.Gerald, "Applied Numerical Analysis," Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1978.
- 7) 中田高義, 高橋則雄, "電氣工学の有限要素法", 森北出版, 1982.