

2 차 원 디 지 탈 필 터 의 반 복 실 현 에 관 한 연 구

84336

○ 장 태 음 이 은 현
함 공 전 자 공 학 과 한 국 함 공 대 학

A study on the Iterative Implementation of 2-D Digital Filter

○ Tae Yuns Chang Yoon Hyun Lee
Department of Avionic Eng., Hankuk Aviation College

ABSTRACT

A 2-D digital filter with a rational frequency response can be expanded into an infinite sequence of filtering operations. Each filtering operation can be implemented by convolution with a low-order 2-D finite-extent impulse response. If a convergence constraint is satisfied, the sequence of estimates will approach the desired output signal. In practice, as the number of iterations is finite, the frequency response implemented by iterative computations is an approximation to the desired rational frequency response.

1. 서 론

지금까지의 대부분 영상처리 기법은 BLUR 나 잡음의 영향을 줄여 영상의 화질을 높이는 RESTORATION 과 ENHANCEMENT 나 EDGE 등 영상 이해 및 인식에 필요한 영상 FEATURE를 얻기 위해서 디지털 필터링의 기본처리 기법인 FIR 필터에 의한 필터링을 사용하고 있다.

2차원 디지털 필터에 의한 반복실현 방법은 제한루프 (FEED BACK) 개념과 유사한 이론이 적용 된다. 즉 2차원 유리주파수 응답은 유한한 크기의 임펄스 응답 (FIR) 필터링만을 포함하는 반복계산 형태를 만들기 위해 사용 된다. 이러한 2차원 필터링은 2차원 컨벌루션을 실현 (IMPLEMENTATION)시키는 것을 의미하며,

디지털 필터에서 실현한다는 말은 소프트웨어, 즉 컴퓨터 프로그램, 또는 하드웨어에 의해서 신호처리 알고리즘을 해결해 나가는 것을 의미 한다.

2차원 유리주파수 응답은 수렴조건이 만족하는 상황에서 반복계산을 무한하게 수행하면 이론적으로 실현시킬 수 있게 된다. 그러나 실제로는 반복 계산의 횟수가 제한되기 때문에 실제로 실현되는 주파수 응답은 본래 구하고자 하는 유리 주파수 응답의 근사치가 된다.

반복 계산에 의한 실현 방법은 단지 FIR 필터링만을 적용하기 때문에 실수 대칭인 2차원 유리 주파수 응답에 대한 근사치를 구하기 위해서 사용 된다. 또한 2차원 유리 주파수 응답은 McClellan 변환식을 적용하여 1차원 필터로부터 2차원으로 변환시켜서 구

한다[1], [2].

2. 반복 계산식의 유도

2차원 유리 주파수 응답은 다음식으로 표현 된다.

$$H(\omega_1, \omega_2) = A(\omega_1, \omega_2) / B(\omega_1, \omega_2) \quad (1)$$

여기서 $A(\omega_1, \omega_2)$ 와 $B(\omega_1, \omega_2)$ 는 다음과 같은 삼각 다항식으로 주어진다.

$$A(\omega_1, \omega_2) = \sum_{m_1 m_2} a(m_1, m_2) \exp[-j\omega_1 m_1 - j\omega_2 m_2] \quad (2)$$

$$B(\omega_1, \omega_2) = \sum_{n_1 n_2} b(n_1, n_2) \exp[-j\omega_1 n_1 - j\omega_2 n_2] \quad (3)$$

윗식에서 SUM은 유한한 항으로 구성된다고 가정 한다.

즉 ARRAY $a(m_1, m_2)$ 와 $b(n_1, n_2)$ 는 유한한 크기의 값을 갖는다.

계산의 형태를 만들기 위해서 새로운 식을 도입하여, 다음과 같이 정의 한다.

$$C(\omega_1, \omega_2) = 1 - B(\omega_1, \omega_2) \\ = \sum_{n_1 n_2} c(n_1, n_2) \exp[-j\omega_1 n_1 - j\omega_2 n_2] \quad (4)$$

(4)식을 사용하면 (1)식은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$H(\omega_1, \omega_2) = A(\omega_1, \omega_2) / [1 - C(\omega_1, \omega_2)] \quad (5)$$

입력신호 $x(n_1, n_2)$ 의 스펙트럼을 $X(\omega_1, \omega_2)$, 출력신호 $y(n_1, n_2)$ 의 스펙트럼을 $Y(\omega_1, \omega_2)$ 이라 정의하고, $|X(\omega_1, \omega_2)|$ 와 $|Y(\omega_1, \omega_2)|$ 가 BOUNDED 된다고 가정하면 (5)식은 다음과 같이 표현할 수

있다.

$$Y(\omega_1, \omega_2) = H(\omega_1, \omega_2) X(\omega_1, \omega_2) \\ = A(\omega_1, \omega_2) X(\omega_1, \omega_2) \\ / [1 - C(\omega_1, \omega_2)] \quad (6)$$

또는

$$Y(\omega_1, \omega_2) = A(\omega_1, \omega_2) X(\omega_1, \omega_2) \\ + C(\omega_1, \omega_2) Y(\omega_1, \omega_2) \quad (7)$$

따라서 반복 계산식에서 출력 스펙트럼의 형태는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$Y_{-1}(\omega_1, \omega_2) = 0 \\ Y_i(\omega_1, \omega_2) = A(\omega_1, \omega_2) X(\omega_1, \omega_2) \\ + C(\omega_1, \omega_2) Y_{i-1}(\omega_1, \omega_2) \quad (8)$$

I번 반복 계산후 출력은 다음식으로 표현할 수 있다.

$$Y_I(\omega_1, \omega_2) = A(\omega_1, \omega_2) X(\omega_1, \omega_2) \\ \sum_{i=0}^I C^i(\omega_1, \omega_2) \quad (9)$$

I가 무한대로 가면 (9)식은

$$Y(\omega_1, \omega_2) = A(\omega_1, \omega_2) X(\omega_1, \omega_2) \sum_{i=0}^{\infty} C^i(\omega_1, \omega_2) \\ = A(\omega_1, \omega_2) X(\omega_1, \omega_2) \\ / [1 - C(\omega_1, \omega_2)] \quad (10)$$

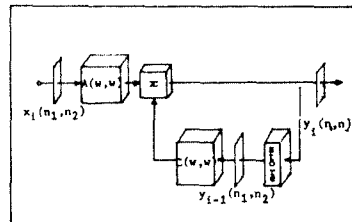


그림 1. 1차 계환루프에 의한 반복계산 모델

그림 1 은 입력이 $x_i(n_1, n_2)$, 출력이 $y_i(n_1, n_2)$ 이고, 반복계산 변수가 I인 1차 캐환루프로 구성된 반복 계산 모델을 도시하고 있다. 여기서 STORE OPERATOR는 전단에서 계산된 결과를 저장하는

1차원 필터에서 Z^{-1} 로 표현되는 SHIFT OPERATOR 와 유사한 성질을 갖고 있다.

(7)식에서 표현된 FOURIER 변환 $Y(\omega_1, \omega_2)$ 를 같은 출력신호 $y_i(n_1, n_2)$ 를 구하기 위해서 입력신호 $x_i(n_1, n_2)$ 는 계단함수를 취했다.

$$x_i(n_1, n_2) = x(n_1, n_2) \quad i > 0 \\ = 0 \quad i < 0 \quad (11)$$

(9)식에서 보는 바와 같이 초기조건은

$$y_i(n_1, n_2) = 0 \quad (12)$$

$i=0$ 에서 반복계산이 시작된다. 그때 요망하는 출력 $y(n_1, n_2)$ 는 그림 1에서 필터의 정상상태 (STEADY-STATE)의 출력으로 실현된다.

반복계산의 해는 (10)식의 등비급수가 수렴하면 요망하는 출력이 계산된다. 이때 수렴하기 위한 조건은 다음과 같다.

$$|C(\omega_1, \omega_2)| < 1 \quad (13)$$

$a(n_1, n_2)$ 와 $c(n_1, n_2)$ 가 유한한 크기의 ARR-AY 이기 때문에 FIR 필터링만으로 (8)식을 실현

시킬 수 있게 된다. 이때 (5)식의 유리 주파수 응답은 무한히 반복되는 FIR 필터링으로 구할 수 있다.

3. 반복 계산의 종료

2차원 디지털 필터를 실제로 실현시킬때 계산되는 반복계산 횟수는 제한된다. (9)식을 사용하면 I 번째 반복 계산후 출력신호의 스펙트럼은 다음식으로 주어진다.

$$Y(\omega_1, \omega_2) = A(\omega_1, \omega_2) X(\omega_1, \omega_2) \sum_{i=0}^I C^i(\omega_1, \omega_2) \\ = Y(\omega_1, \omega_2) [1 - C^{I+1}(\omega_1, \omega_2)] \quad (14)$$

I 번 반복후 계산이 종료될때 발생하는 스펙트럼의 오차는

$$Y(\omega_1, \omega_2) / Y(\omega_1, \omega_2)$$

의 비가 된다. 이때 발생한 오차를 최소로 줄이기 위해서 그 비를 1 에 가깝게 $C(\omega_1, \omega_2)$ 를 다음과 같이 제한시킨다.

$$\left| \frac{Y_I(\omega_1, \omega_2)}{Y(\omega_1, \omega_2)} - 1 \right| = |C(\omega_1, \omega_2)|^{I+1} < \epsilon \quad (15)$$

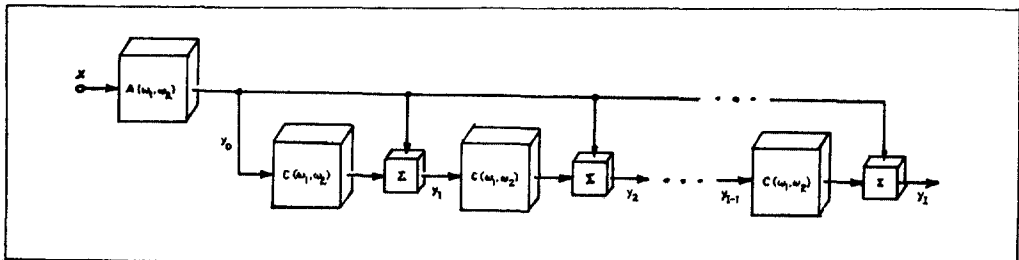


그림 2. I 번 반복후 종료된 반복계산 모델

여기서 ϵ 는 작은 양의 상수가 된다. 이때 스펙트럼의 오차가 허용오차를 만족시키면, 반복계산은 종료하게 되며, 계산하고자 하는 유효한 주파수 응답은 I번 반복후 계산이 종료될때 (9)식으로 부터 다음과 같이 유도 된다.

$$H_I(\omega_1, \omega_2) = A(\omega_1, \omega_2) \sum_{i=0}^I C^i(\omega_1, \omega_2) \quad (16)$$

만일 인수 $A(\omega_1, \omega_2)$ 가 무시된다면, $H_I(\omega_1, \omega_2)$ 는 McClellan 변환 필터 [1], [2]에서 TAB WEIGHT가 1 이 될때가 된다.

$H_I(\omega_1, \omega_2)$ 는 그림 2 에서 보는바와 같이 한단계에서 다음단계까지 신호가 통과할 때의 반복계산 형태가 된다. 그림 2 는 $H_I(\omega_1, \omega_2)$ 가 2차원 FIR 필터의 주파수 응답을 나타내고 있으며, 반복 계산이 종료될때 실제로 실현된 필터의 주파수 응답은 요망하는 유리 주파수 응답 $H(\omega_1, \omega_2)$ 의 FIR 근사치가 된다.

4. 실험

실험에 사용한 1차원 유리주파수 응답은 모델 [6] 을 사용하였으며, 그림 4는 실험에 사용한 ORIGINAL LOW-PASS 필터를 HIGH-PASS 및 BAND-PASS로 주파수 변환시킨 각각의 주파수 특성을 보여주고 있다.

2차원 디지털 필터의 유리 주파수 응답은 McClellan 변환식을 사용하여 구했다.

$$\cos(\omega) = \sum_{p=0}^P \sum_{q=0}^Q t(p, q) \cos(p\omega_1) \cos(q\omega_2)$$

여기서 2차원으로 변환시킨 필터는 원형대칭인 경우를 적용했다.

$$P = Q = 1$$

$$t(1, 1) = t(1, 0) = t(0, 1) = -t(0, 0) = 1/2$$

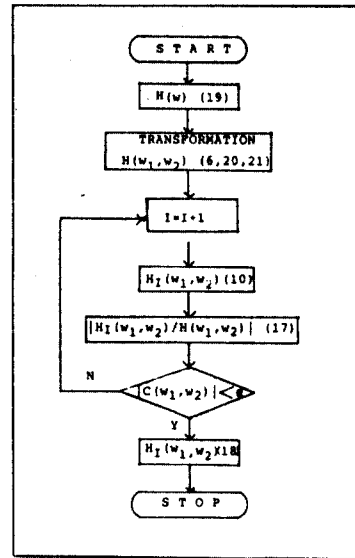


그림 3. 반복계산 FLOW CHART

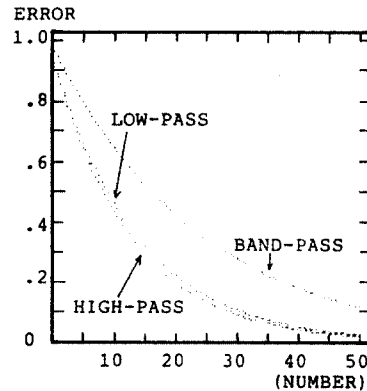


그림 4. 1차원 ORIGINAL 필터의 주파수 특성

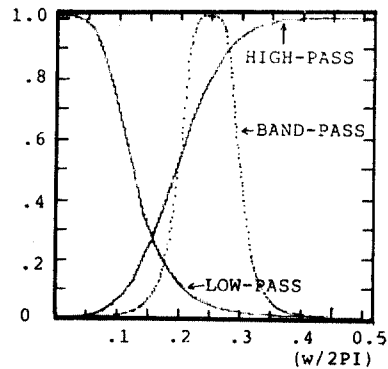
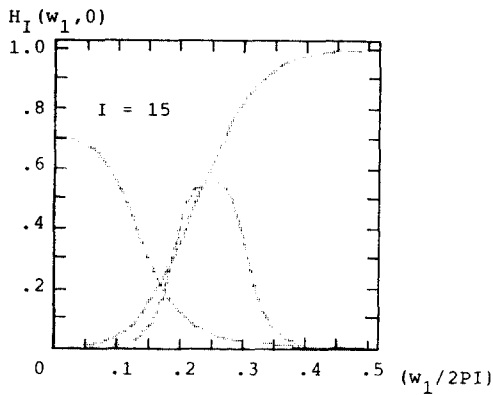
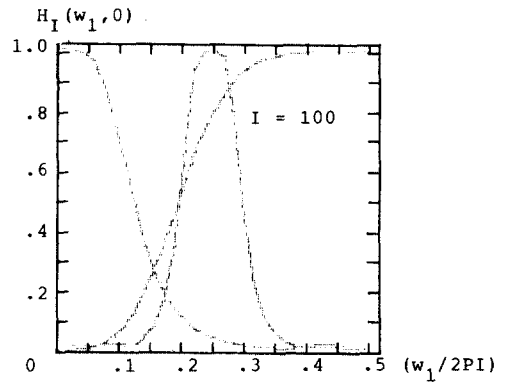


그림 5. 반복계산 종료후 발생된 오차

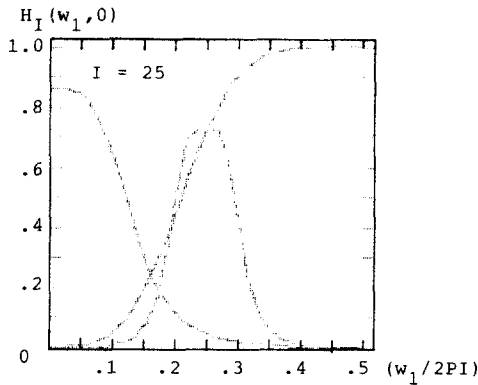


(1) I = 15 회 반복

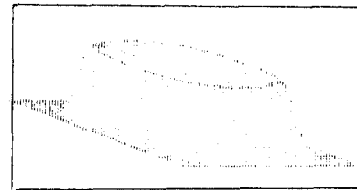


(4) I = 100 회 반복

그림 6. w_1 주파수만 고려한 2차원 디지털 필터의 주파수 특성 $H_I(w_1, w_2)$



(2) I = 25 회 반복



(3) I = 40 회 반복

그림 7. 반복실행된 2차원 BAND-PASS 필터의 주파수 특성 (I = 100 회 반복)

그림 5 는 반복계산이 종료될 때 생기는 오차를 각각 도시하고 있다. 약 30회 반복계산후 1% 이하로 오차는 감소 하였다.

5. 결 론

반복실행 방법은 2차원 유리 주파수 응답을 FIR SEQUENCE 로 분해(DECOMPOSITION) 시켜서 실행하는 방법으로 사용 된다. 따라서 NONCAUSAL 한 2차원 IIR 필터도 SPECTRAL FACTORIZATION 이나 부분 분수 전개등 복잡한 계산을 수행하지 않고 근사적으로 요망하는 주파수 응답에 접근시켜서 실현시킬 수 있다.

REFERENCES

- [1] R.M. Mersereau and W.F.G. Mecklenbrauker and T.F. Quatieri, Jr., "McClellan Transformation for 2-D Digital filtering: I-Design," IEEE Trans. Circuits Syst. Vol. Cas-23, p. 405, 1976
- [2] This issue: II-Implementation, "p. 414
- [3] R.M. Mersereau, and D.E. Dudgeon, "Two-Dimensional Digital Filtering," Proceedings of the IEEE, Vol. 63, NO. 4, April, 1975
- [4] T.F. Quatieri, and D.E. Dudgeon, "Implementation of 2-D Digital filters by Iterative Methods," IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing, Vol. ASSP-30, NO. 3, June, 1982
- [5] D.E. Dudgeon, "An Iterative Implementation for 2-D Digital Filters," IEEE Trans. Acoustics, Speech and Signal Processing, Vol. ASSP-28, NO. 6, Dec. 1980
- [6] Harry Y.F. Lam, "Analog and Digital Filters," Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., CH. 12, pp. 552-564, 1979
- [7] A.V. Oppenheim and R.W. Schaffer, "Digital Signal Processing," Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1975
- [8] L.R. Rabiner and B. Gold, "Theory and Application of Digital Signal Processing," Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, Inc. New York, 1979