

비직교 기본 함수인 웨이티드 하다마드의 신호처리

84334

이 문호. 이 성열. 안 종 기
전자공학부 전공대학 전북대학교 전자공학부

Non-Orthogonal Basis Functions of Weighted Hadamard to Signal Processing.

Jeong Jong Ki. An Seong Ryeul. Lee Moon Ho.
Chonbuk National Univ. Dept. of Electronics

Abstract

In this paper, We have proposed the new Lee Weighted Hadamard(LWH) transform which retains the main properties of Hadamard matrix. The non-orthogonal LWH matrix was Weighted in the center of the spatial domain. The human visual response to spatial frequencies in nonuniform and that the mid spatial frequencies are emphasized more than the low and high spatial frequencies. The fast algorithm of the Lee Weighted Hadamard transform has shown by the sparse matrix factorization.

1. 서 론

DPCM 과 같은 예측 부호화는 두 값의 차이만을 전송 시키는 방식으로 전송신호의 분산이 감소되어 양자화 잡음 전력이 작아지며 부호화 장치가 덜 복잡하고, 동작속도도 빨라서 실시간

처리가 가능하다. 그러나 전송잡음의 영향을 크게 받는다. 이에 비해 변환 부호화는 직교 변환을 이용하여 에너지를 한 부분에 집중시켜 그 부분만을 전송시킨다. 이 방법은 영역을 변환시켜 전송하므로

전송시에 생긴 채널잡음의 영향을 수신 변환시에 분산시켜 입력신호의 변환에 큰 영향을 받지 않는다.

사람의 눈은 저주파보다 고주파보다 공간중역 주파수에 더욱 민감하다. 즉 사람의 눈이 공간역역필터작용을 한다. Masking function 은 point spread function 에 의해 화면 중심 부분을 강하게 보이게 한다. 시각 부호화는 여기에 근거를 두고 있다.

본 논문에서는 하다마드 변환의 성질을 가운데서

공간 중심에 무게를 준 새로운 행렬인 비 직교 행렬 (LWH)를 이용하여 영상 신호처리를 했다. 이 LWH 행렬의 직교함수로 수렴 됨을 보이고 보정 (corr.) 행렬을 삽입하여 수신단의 영상신호의 본도를 컴퓨터 시뮬레이션으로 보였다.

2. 웨이티드 하다마드 매트릭스

웨이티드 하다마드 (Lee Weighted Hadamard) 는 $(*1, *2)$ 로 구성된 비직교 행렬 이다. 이 LWH 의 기본 4×4 행렬은 (2-1)식과 같고 Recursive 하므로 일반식은 (2-3)식과 같이 쓸 수 있다.

$$[LWH]_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-1)$$

$$[LWH]_8 = [LWH]_4 \otimes [H_2(1)] \quad (2-2)$$

$$[LWH]_N = [LWH]_{N/2} \otimes [H_2(1)] \quad (2-3)$$

where \otimes is Kronecker product.

$$[H_2(1)] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

LWH 는 비직교 한 행렬이며 Transpose 은 자기 자신과 같으며 inverse는 다르다.

$$[LWH] = [LWH]^{-T} \neq [LWH]^{-1} \quad (2-4)$$

이러한 비직교 함수 매트릭스에 보정항을 곱하여 새로운 매트릭스를 만들어낸다. 이 매트릭스를 $\langle X \rangle$ 매트릭스라 한다. $\langle X \rangle$ 매트릭스는 LWH 매트릭스를 orthogonal 화 하는 매트릭스는 (2-5)식과 같이 된다.

$$[LWH]_{corr}^{-1} = [H]^{-1} [weighted]^{-1} [X] \quad (2-5)$$

$[X]$ 기본 4×4 매트릭스는 (2-6) 식과 같고

$$[X]_4 = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & -24 & 0 \\ 0 & -24 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{bmatrix} \quad (2-6)$$

비직교 함수는 LWH 이 보정항을 곱한 결과에 의해서

$$[LWH]_N = [H]_N [\text{weighted}]_N \quad (2-7)$$

$$[LWH]_N^T = [H]_N^T [\text{weighted}]_N^T \quad (2-8)$$

$$[LWH]_{\text{corr.}}^{-1} = [H]_N^{-1} [\text{weighted}]_N^{-1} [X]_N \quad (2-9)$$

Correx X(n,v) 를 이용한 변환 부호화 방식
으로 송수신단의 Image 전송 계통도는 Fig 1

과 같다.

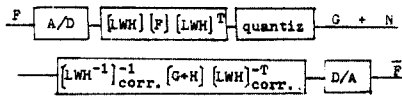


Fig 1 Transform of image processing

3. 웨이워드 하다마드 매트릭스의 직교함수로 수렴
신호가 Sin 과 Cosin 을 나타내기 위하여서는 Trian-
gular wave form 이 필요하다. Triangular wa-
ve form 은 Orthogonal Set 이 아니다.
비직교 함수는 신호를 나타내려면 triangular ba-
sis 을 사용 하면 나타낼 수 있다. 이 것은 Piece-
wise linear function을 이용하여 Sin 과 Cosin
을 triangular 로 만들 수 있다. 만들어는 sin
을 Sir(sine ramp) cosine 을 Cor 라 부른다
구간이 $[t_a, t_b]$ 로 정의된 실변수 t 의 $x(t)$
를 실변수 함수 있는 Banach space(B) 가 있다면
 $X_n \in B$ 이 있고 $z \in B$ 이 있다.

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} d_n X_n \quad (3-1)$$

그러면 z 는 B 에 수렴한다.

여기서 직교 함수 가 아닌 성분을 가진 함수

$$y_k = \sum_{l=1}^{\infty} A_{k,l} X_l \quad k=1,2,3,\dots \quad (3-2)$$

$A_{k,l}$ 의 성분을 가지고 있는 A 는 Unique inf-
inite 매트릭스다.

$$Y = AX \quad (3-3)$$

여기서 A B 에 부분 집합들이 수렴된 것을 보이기

위하여 A 란 매트릭스를 triangular 매트릭스로
만들어서 convergence를 보인다.

$$A_{k,l} = [LWH][C] \quad (3-4)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} [C] = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & a_1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 \end{bmatrix} \quad (3-5)$$

$$A_{k,l} = \begin{cases} 0; & \text{if } k > l \\ 0; & \text{if } k < l \text{ \& } 1/k \text{ is not integer} \\ A_{k,l}; & \text{if } 1/k \text{ is an integer} \end{cases} \quad (3-6)$$

$A_{k,l}$ 도 A 부터 구할 수 있다.

$$A_{k,l}^{-1} = \begin{cases} 0; & \text{if } k > l \\ 0; & \text{if } k < l \\ k_1; & \text{if } k=l \\ b_{1/k}; & \text{if } 1/k \text{ is an integer} \end{cases} \quad (3-7)$$

4. 웨이워드 매트릭스의 Fast Algorithm

a) Forward LWH의 Fast Algorithm

일반적인 LWH 매트릭스의 형태는 Hadamard 매트릭스와
Weighted 계수 매트릭스로 이루어져 있다.

$$[LWH] = [H][\text{weighted}] \quad (4-1)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad (4-2)$$

Hadamard 매트릭스를 부호의 Sparse 매트릭스로
하면 (4-3)와 같다.

$$\begin{bmatrix} + & + & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + & + \\ + & - & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} + & + & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + & + \\ + & - & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + & - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} + & + & + & + \\ + & - & + & - \\ + & + & - & - \\ + & - & - & + \end{bmatrix} \quad (4-3)$$

(4-2) 식은 앞다과 successive 하므로 (4-4)
식과 같이 구성한다.

$$\begin{bmatrix} X_2(0) \\ (1) \\ (2) \\ (3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(0) \\ (1) \\ (2) \\ (3) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} X_3(0) \\ (1) \\ (2) \\ (3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_2(0) \\ (1) \\ (2) \\ (3) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} X_4(0) \\ (1) \\ (2) \\ (3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_3(0) \\ (1) \\ (2) \\ (3) \end{bmatrix} \quad (4-4)$$

(4-4) 식을 변환하여 signal flow graph 나타내면 Fig.2과 같다.

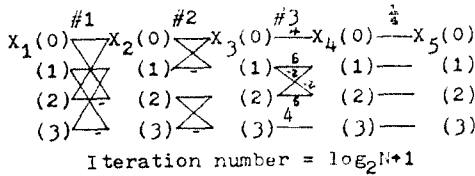


Fig.2 Fast LWH signal flow graph, N=4
b) Inverse LWH 의 Fast Algorithm Inverse

매트릭스는 Hadamard 와 Weighted 매트릭스 및 보정항으로 되어있다.

$$[LWH]_{corr.}^{-1} = [H]^{-1} [weighted]^{-1} [X] \quad (4-5)$$

여기서 Weighted 매트릭스와 보정항 매트릭스의 새로운 매트릭스를 산출하면 (4-6) 식과 같다.

$$[X] = [weighted]^2 \quad (4-6)$$

$$[LWH]_{corr.}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & -24 & 0 \\ 0 & -24 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \quad (4-7)$$

앞에서 구한 (4-4) 식에 의해 Forward Fast Algorithm 과 같은 형태로 전개, Signal flow graph 나타내면 Fig.3 과 같다.

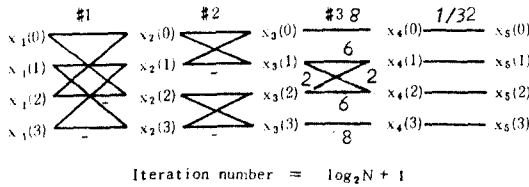


Fig.3 Inverse Fast LWH signal flow graph N=4

5. Data Compression

LWH 매트릭스의 mean square error 를 구하여 KLT 에 비교해보면 매트릭스가 비 직교한 경우이지만 MSE 가 향상 되었음을 알수있다. Mean square error 는 다음과 같이 구해진다.

$$E_d = \text{tr}(\hat{\Sigma}_d) = \sum_{i=1}^N \frac{\hat{\Sigma}_d^2(i,i)}{\hat{\Sigma}_d(i,i) + \hat{\Sigma}_w(i,i)} \quad (5-1)$$

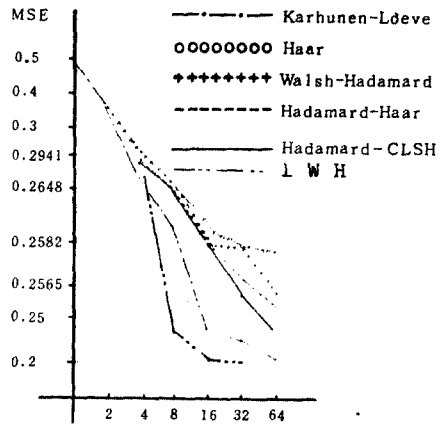


Fig.4 Mean-square error performance of various transforms for scalar Wiener filtering: $\rho = 0.9$

$\rho = 0.9 \quad k_0 = 1$

| Transform | Lee Weighted Hadamard | | | | Hadamard - CLSH | | | |
|--------------------|-----------------------|-------|-------|-------|-----------------|---------|---------|---------|
| | 4x4 | 8x8 | 16x16 | 32x32 | 4x4 | 8x8 | 16x16 | 32x32 |
| M. S. E | 0.2944 | 0.277 | 0.218 | 0.20 | 0.29421 | 0.26488 | 0.25825 | 0.25656 |
| Variance | 1.07 | 1.142 | 1.257 | 1.427 | 1.00002 | 1.00002 | 1.00002 | 1.00002 |
| Energy Compression | 0.075 | 0.142 | 0.257 | 0.427 | 0.00015 | 0.00015 | 0.00015 | 0.00015 |

Table 1. Scalar Wiener filter

Licon data 를 이용하여 Fig.1 의 계통도로 수신 단의 Hadamard 변환과 LWH 의 변환 비교를 HP-1000 computer 의 Plotter를 이용하여 Two dimensional 에서 비교하였다.

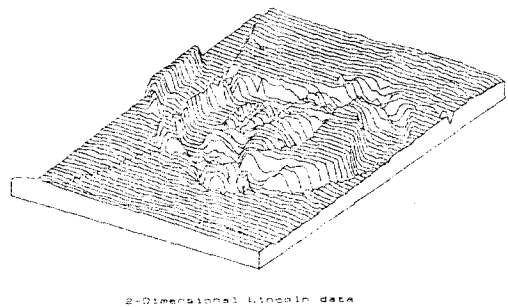
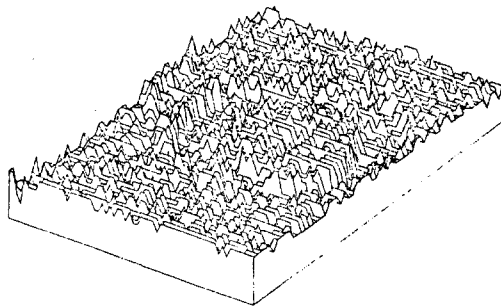
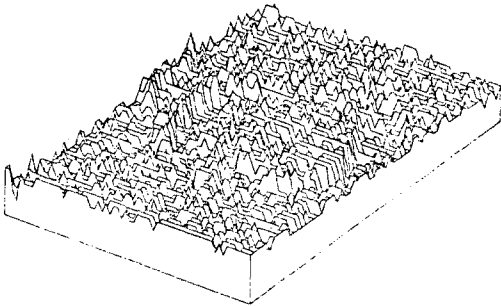


Fig.5 Original Licon data



2-Dimensional Lincoln data

Fig.6 Hadamard Transform data,
(32 quantize)



2-Dimensional Lincoln data

Fig.7 LWH Transform data, (32 quantize)

6. 결 론

비 직교 함수인 웨이티드 하다마드 변환의 Banach Space 에서 직교 함수로 수렴시키는 방법을 제시 했으며, 신호 처리에서 data 압축과 시그널 합성 등 변환 중심을 강하게 본 다른 지 특수 목적에 쓸수 있는 Tailor Made Basis 이것을 확인했고 고속 압고 리즘도 구했다.

앞으로 반도체 기술의 발달로 비 직교 함수에 대한 DSP chip 의 개발등에 더욱더 연구가 있어야 할것이다.

Referance

1. 안 성업, 이 윤호, 김 현제. "이 웨이티드 아다마드 변환의 고속 압고 리즘" 대한 전자 공학회 학회 종합학술대회 논문집 Vo 7, July.1984 PP138-40
2. M.H.lee, D.Y.Kim, "Weighted Hadamard Transformation For S/N Ratio Enhancement in Image Transmission" IEEE, ISCAS Proceedings, May, 1984
3. D.N.Green, S.C.Bass "Representing Periodic Waveforms with Nonorthogonal Basis Functions" IEEE Transactions on Circuits and Systems. Vol CAS-31, No.6 June 1984 PP518-534
4. Moon Ho Lee, "Non-orthogonal Bases of Weighted Hadamard to Signal Proceeding" Submitted IEEE, ISCAS ,85