多次元 圧密의 數値解析과 그 適用에 관한 考察

Numerical Analysis of Multidimensional Consolidation and its Adoptation

全南大學校 工科大學 敎授 朴 炳基

圓光大學校 工科大學 助敎授 鄭 鎭燮

1 序論

軟弱地盤上의 構造物의 沈下解析에 있어서 粘土層의 두께에 비하여 充分히 넓지 않은 荷重이 載荷될때는 圧密이 2次元 또는 3次元的으로 發生하리라는 것은 圧密理論 初期부터 論議되어온 것이다.

그러나 理論解析이 어렵고 境界條件이 特殊한 경우를 除外하고는 그解를 求할수 없으므로 지금까지 荷重載荷時의 初期過剩間隙水圧이 彈性体에 部分載荷時 垂直応力의 分布와 같다고 보아 Boussinesq의 理論을 適用하고 또 排水도 鉛直方向으로만 가정하여 各点의 沈下量을 計算하였다.

또 粘土層에 堤防을 築造할때 一次元的 거동은 드물고 側方流動을 포함한 非線形 圧密挙動이 일어나고 있기 때문에 一次元的 圧密解析으로 이러한 現象을 잘 說明할 수가 없다.

한편 Rendulic (1935年)은 Terzaghi의 一次元圧密理論을 三次元에 擴張하여 다음과 같은 圧密方程式을 提案하였다.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = C_v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

단 윗 式에서 C_v는 $C_v = \frac{k}{m_v \gamma_w}$ 가 아니고 一般的으로 $C_v = \frac{k}{\gamma_w f(x, y, z)}$ 라 하였다

即 $f(x, y, z)$는 3次元的 有效応力의 變化와 이것에 對応하는 Volumetric strain에 의하여 定해지는 函數로

$$f(x,y,z) = \frac{1}{1+e_0}\left(\frac{\partial e}{\partial \sigma_1} + \frac{\partial e}{\partial \sigma_2} + \frac{\partial e}{\partial \sigma_3}\right)$$

이며 $e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ 이다.

Terzaghi는 Cv값이 一定値라고 가정하는데 反하여 3次元으로 擴張할때에는 応力에 따라 變하도록 規定한것이다.

이와 같은 事項이 解를 難解하게 하고 土体의 連續性을 充分히 說明하지 못한다는 것이 周知의 事實이다.

이와는 다르게 Biot는 變位가 未知數로 하여 흙 要素의 平衡式을 中心으로 連續條件式을 聯立하여 다음과 같은 支配方程式을 만들었다.

$$\frac{\mu}{1-2\nu}\,\mathrm{grad}\,e + \mu \nabla^2 u + \mathrm{grad}\,u = c \quad (\text{平衡方程式})$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -\frac{k}{\gamma_w}\nabla^2 u \quad (\text{連續方程式})$$

이 式은 理論的으로는 圧密의 mechanism을 充分히 說明하고 있지만 支配方程式이 과잉간극수압과 變位를 未知數로 한 聯立偏微分 方程式이 되기 때문에 正解를 求하기가 어렵다.

그러나 1960年代 後半以后 Computer의 大型化와 數値解析法의 急速한 開発로 Biot의 圧密方程式에 의한 複雜한 境界値의 問題解析이 可能하게 됨에 따라 多次元 圧密의 解析이 큰 進展을 가져왔다.

한편, 応力-変形率関係式의 確立을 目標로 一連의 研究가 이루어져 過去에 使用됐던 彈性 model보다는 흙의 挙動을 잘 나타내는 応力-変形率関係式이 提案되었다.

그 中에서 Roscoe 등의 Cam-clay 理論은 比較的 간단한 式으로써 粘土의 特性이 明確하게 記述되고 있다.

또 最近에는 Creep나 応力経路等 時間效果를 포함한 粘塑性 model에 대한 構成式도 Sekiguchi 等에 의하여 提案되었다.

그 結果 過去에는 圧密理論과 応力-変形率理論이 別個로 発達하여 오다가 이 兩者를 結合한 変形解析이 70年代 後半以来 現在까지 많은 發展을 거듭하고 있다.

現在까지 提案된 構成方程式과 有限要素法의 発達過程을 概括하면 다음 表와 같다.

이제 世界的인 추세로 보아 圧密現象의 解析 段階를 벗어나 現実問題에 応用하는 쪽으로 관심이 集中된다고 말 할 수 있다.

Table -1

Historical Review Of Constitutive Equations

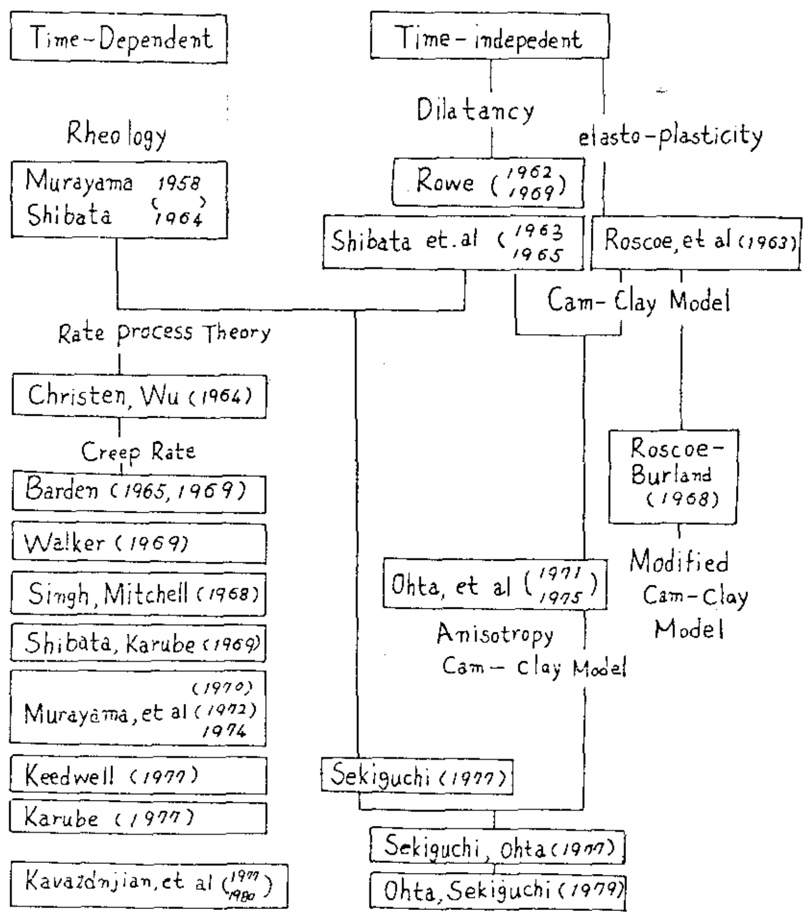
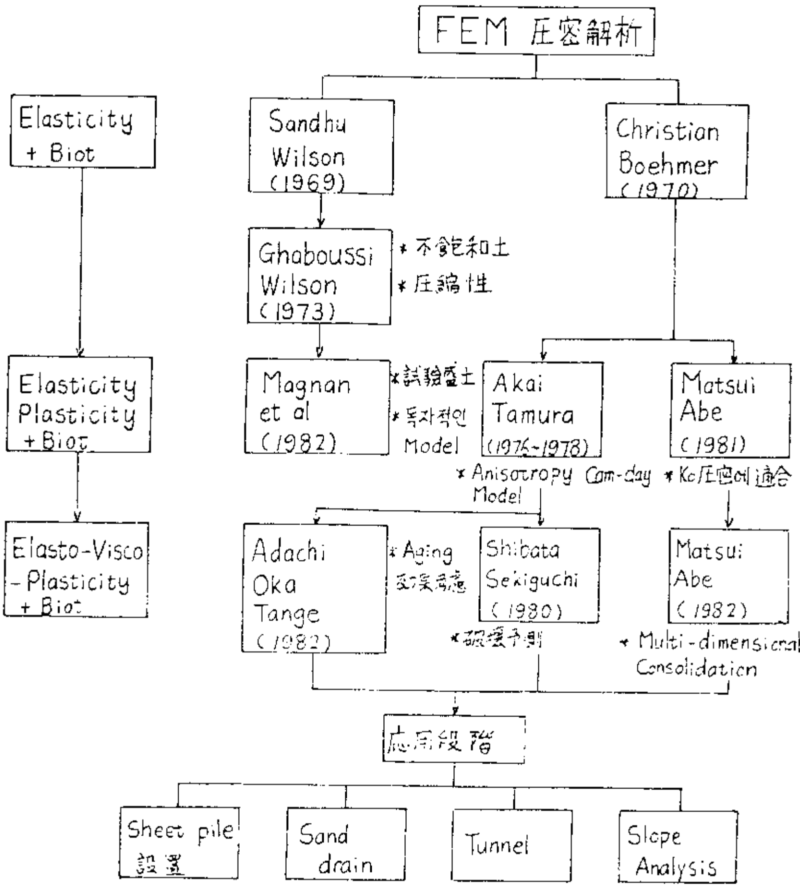


Table-2

FEM 에 의한 壓密解析의 發展過程



2 應力-變形率關係式

實際地盤은 흙이 堆積過程에서 非等方性과 彈性, 塑性, 粘性을 가지며 壓密過程中의 土質媒介變數變化, 粘土, 모래등 여러 種類의 흙의 存在 깊이에 따른 上載荷重이나 先行壓密荷重의 變化, 堆積時間에 의한 堆積層의 aging 效果等을 反映할 수 있도록 여러 種類의 model이 提案되었다.

2-1 彈性 model

2.1.1 線型彈性 model

sand 및 盛土層과 같이 不飽和土에 使用되는 model에서 土質定數로 G, ν 값만 使用된다.

2.1.2 非線型彈性 model

壓密過程中에 work-hardening에 의한 Lame 定數 L, G가 혼다의 實驗結果를 參照하여 다음 式과 같이 變化되는 土質媒介變數가 使用된다.

$$L = \frac{p(1+e_0)}{K} - \frac{2}{3}G$$

$$G = G_0 \exp\left(-\frac{e-e_0}{\lambda}\right) \qquad -(1)$$

2.1.3 線型彈性 model (c-φ 土에 適用)

sheet pile 나 擁体破壞狀態를 判斷할 수 있도록 mohr-coulomb의 破壞規準이 使用되고 있음.

2-2 彈塑性 model

2.2.1 original Cam-clay model

Roscoe 等의 original Cam-clay model은 흙을 等方等質로 假定하였기 때문에 試料는 壓密過程에서 계속적인 降伏이 일어나고 降伏軌跡은 壓縮이나 引張이나 꼭 같은 形態로 對稱된다.

지금 K_0로 壓密된 試料가 實土에 있을때 非排水剪斷試驗에서

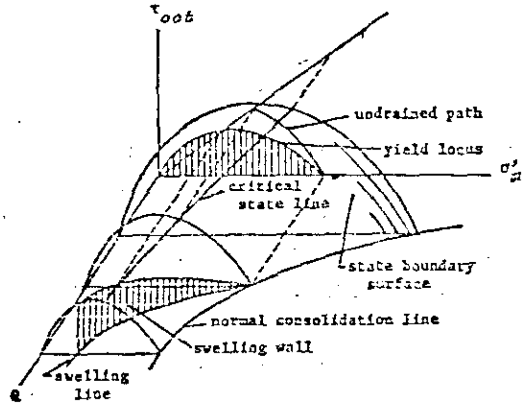


Fig. 1 state surface.

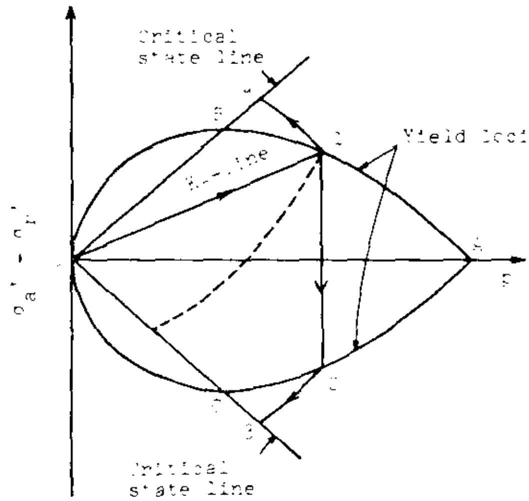


Fig. 2 Yield loci showing isotropic strain-hardening

引張시키면 非排水応力經路는 1에서 2로 될 것이며 따라서 p는 一定한 값이 되어야 한다. 1-2는 이른바 彈性壁에서의 거동이고 다시 非排水応力經路는 2-3曲線을 따라 限界状態인 点3에 到達한다.

한편 圧縮側에서 非排水剪断을 하면 予想되는 有効応力經路는 1-4가 될 것이다.

이 結果 1-4와 2-3은 p軸에 관하여 対称이다.

그러나 많은 試驗結果는 引張側에서 非排水応力經路는 1-2-3과는 아주 다른 軌跡을 갖는 形態이다.

이것은 K_0 圧密過程에서 発生한 흙의 非等方性을 考慮하지 않았기 때문이다. 다음에 說明하는 Anisotropic Cam-clay model에서는 Ohta 等에 의해서 非等方性을 使用할 수 있다. 그러나

K_0-圧密粘土에 있어서 等方的인 変形率硬化를 가정하게 되는 어려움이 主로 dilatancy에 대한 剪断方向의 逆轉의 効果를 無視했기 때문에 発生된 것이라고 믿어진다.

여기서 dilatancy는 p가 一定한 状態의 荷重하에서 일어나고 있는 体積変化라고 定義된다.

여기서 말한 Anisotropic Cam-clay model은 이 効果를 考慮하려고 試図하였다.

우선 다음을 仮定했다

active Loading 아래서

$$\delta v = \mu \delta(\tau_{oct}/p) \qquad (2)$$

여기서 τ_{oct}/p는 初期値로 부터 增加된다

또 passive Loading 아래서는

$$\delta v = -\mu \delta(\tau_{oct}/p) \qquad (3)$$

여기서 τ_{oct}/p는 初期値에서 처음에 減少한다

단 δ는 物理量의 增分을 意味하고 v는 体積変形率, μ는 材料定数이고 τ_{oct}는

$$\tau_{oct} = \sqrt{\frac{1}{3} S_{ij} S_{ij}} = (\sqrt{2}/3)\cdot q \qquad (4)$$

로 定義되는 八面体剪断応力이다.

여기서 S_{ij}는 差応力 Tensor (i,j) 成分이며 q는 τ_{oct} 代身이 다음에 使用되는 応力媒介変数이다

單調롭게 增加하는 荷重을 받고있는 等方圧密粘土에서는 式(2)로서 充分하다 実験으로 立證된 바는 等方圧密粘土 일지라도 剪断方向의 変化 (例를 들면 三軸圧縮으로 부터 三軸引張 또는 그 逆)는 dilatancy가 상당히 일어날 수 있도록 許用된다. 反面에 이 상황에서도 τ_{oct}/p의 比는 減小된다.

그러나 式(2)에는 결함이 있다.

결함을 쉽게 把握하기 위해서 Fig 2에서 実線으로 나타낸것처럼. K_0-圧密粘土에서의 典型的인 三軸引張試験에서 非排水応力経路를 생각해보라.

anisotropic Cam-clay model로 부터 対応하는 推定은

$$\tau_{oct}/p - K = \frac{\lambda}{\mu(1+e_0)}\ln\left(\frac{p}{p_0}\right) \qquad (5)$$

이다 여기서 K, e_0, p_0는 各各 (一般的으로 非等方性인) 圧密이 完了時의 τ_{oct}/p의 比, 間隙比, 平均有効応力 p이며 λ는 圧縮指数 C_c의 0.434倍이다

Fig 2의 曲線에서 알 수 있는바와 같이 $(\sigma_1'-\sigma_3')/p$의 比와 平均有效応力 p는 引張側의 変形率과 함께 減小한다 따라서 式(5)의 右辺도 單調롭게 減小하지만 式(5)의 右辺의 경우는 다르다 $\sigma_1'=\sigma_3'$의 狀態를 넘을때까지 式(5)의 左辺의 값은 減小한다 그러나 그 後에는 左辺은 τ_{oct}의 定義때문에 增加한다 이 어려움을 피하기 위하여 $\sigma_1'=\sigma_3'$의 狀態에 到達한 후에 引張側에 Negative τ_{oct}를 仮定했다

그러나 이 定義는 그러한 剪断을 받고있는 흙 要素의 物理的 狀態가 $\sigma_1'>\sigma_3'$의 狀態로 부터 $\sigma_1'<\sigma_3'$가 되는 狀態로 계속적으로 變한다고 믿어지기 때문에 人為的이다

따라서 非等方正規圧密粘土에 대한 새로운 式을 求했다 이는 剪断方向의 逆轉이 포함된 경우까지도 滿足되어야 한다

有效応力函數로써의 体積変形率에 관해서 記述하여 보자
우선 새로운 応力 parameter η^*를 導入하자
이는

$$\eta^* = \sqrt{\frac{3}{2}(\eta_{ij}-\eta_{ij0})(\eta_{ij}-\eta_{ij0})} \quad \text{—(6)}$$

이며 여기서

$$\eta_{ij} = \frac{S_{ij}}{p}, \quad \eta_{ij0} = \frac{S_{ij0}}{p_0} \quad \text{—(7)}$$

이다 여기서 η_{ij}는 応力-規準化된 差応力 Tensor (i.j) 成分이고 η_{ij0}는 非等方圧密完了時의 η_{ij}의 값이다
定義에 의해서 応力 parameter η^*는 非負數이다

다음 非等方正規圧密粘土의 dilatancy는 다음과 같이 η^*에 比例으로 나타난다고 仮定하자

$$v = D\eta^* \quad \text{—(8)}$$

여기서 D는 dilatancy 係數이다 等方圧密된 三軸條件에서는 式(8)은 Shibata (1963)에 의해서 誘導된 다음 式으로 된다

$$D = \frac{\lambda-\kappa}{M(1+e_0)} \quad \text{—(9)}$$

式(8)에 의하면 減小하지 않는 (Non-decreasing) dilatancy가 差応力

의 初期值로 부터의 어떠한 變化에도 發生하지 않는다는것도 重要하다.
더욱 全体積變化는 P의 作用과 dilatancy로 부터 由來되는 變化의 和라고 가정한다.

卽 $v = \frac{\lambda}{1+e_0}\ln\left(\frac{p}{p_0}\right) + D\cdot\eta^*$ —(9)

式(9)의 妥當性에 대한 檢討로써 非排水有效応力経路가

$\eta^* = -\frac{\lambda}{D(1+e_0)}\ln\left(\frac{p}{p_0}\right)$ —(10)

를 使用하여 計算된다.

또 全体積變形率 v는 式(9)와 같이 表示되었으므로

v의 彈性成分은

$v^e = \frac{k}{1+e_0}\ln\left(\frac{p}{p_0}\right)$ —(11)

그러므로 v의 塑性成分은 다음과 같다.

$v^p = \frac{\lambda-k}{1+e_0}\ln\left(\frac{p}{p_0}\right) + D\cdot\eta^*$ —(12)

지금 plastic potential 函數를 f라고 하고 다음과 같이 쓴다

$f = \frac{\lambda-k}{1+e_0}\ln\left(\frac{p}{p_0}\right) + D\cdot\eta^*$ —(13)

그리고 現在状態의 associated 降伏軌跡을 다음과 같이 仮定하라

$f = v^p$ —(14)

여기서 v^p는 소위 strain 硬化媒介変數이고 式(13)으로 주어진다.
式(14)는 非等方圧密이 끝나는 点에서의 応力要素가 降伏状態에 있는 것을 나타낸다.

즉 $f = v^p = 0$ 이다.

Drucker (1951)의 associated flow rule에 의하여

$\delta\varepsilon_{ij}^p = \Lambda\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$ —(15)

여기서 $d\varepsilon_{ij}$는 塑性変形率 增分 Tensor이다
Λ는 比例定数, σ_{ij}는 有効応力 Tensor

위 2 條件을 一般化시키면

$$\delta w = p\sqrt{(\delta v^p)^2 + (M\cdot\delta\varepsilon^p)^2} \qquad \text{— (4)}$$

$\sqrt{(\delta v^p)^2+(M\delta\varepsilon^p)^2}$ 는 一般的인 塑性變形率 增分量이고
全塑性變形率 tensor $d\varepsilon_{ij}^p$ 의 不變量이다

式(1) 과 (4)로 부터 다음 式을 얻는다

$$\frac{dv^p}{d\varepsilon^p} = \frac{M^2-(q/p)^2}{2(q/p)} \qquad \text{— (5)}$$

(式(4)와 (5)는 Original Cam-clay 에서는 $\delta w = p\cdot M\delta\varepsilon^p$,
$\frac{dv^p}{d\varepsilon^p} = M - \frac{q}{p}$ 이다)

式(5)에 Normality condition을 適用하고

$$\frac{dv^p}{d\varepsilon^p} = -\frac{dq}{dp} \qquad \text{— (6)}$$

式(5)와 (6)으로 부터

$$\frac{dq}{dp} = -\frac{M^2-(q/p)^2}{2(q/p)} \qquad \text{— (7)}$$

또한 $\eta = \frac{q}{p}$ 에서 $\frac{dq}{dp} = d\eta\frac{p}{dp} + \eta$ 이므로
式(7)에 代入하면

$$\frac{dp}{p} = -\frac{2\eta}{M^2+\eta^2}d\eta \qquad \text{— (8)}$$

式(8)을 積分하면

$$\ln(M^2+\eta^2) + \ln p = \ln c \qquad \text{— (9)}$$

이고 $\eta = 0$ 일때 $p = p_0$ 이므로 다음 式이 求해진다

$$p_0 = p\left\{\frac{(q/p)^2+M^2}{M^2}\right\} \qquad \text{— (10)}$$

式(10)이 $p\,q$ 面에서 中心을 $\frac{p_0}{2}$로 갖는 楕円을 나타내며
이 타원이 降伏軌跡이며 式(10)을 降伏函數라 한다
降伏函數 F는 다음과 같이 쓸 수 있다

$$F = q^2 - M^2p_0p + M^2p^2 = 0 \qquad \text{— (11)}$$

Λ값을 決定하기 위하여

連續塑性變形에 대한 條件 (Naghai, 1960)을 導入하면

$df = \delta v^p$ —(16)

에 근거하여 다음과 같이 된다

$\delta\varepsilon_{ij}^p = \delta v^p (\partial f/\partial\sigma_{ij}) / \partial f/\partial p$

여기서 $\delta v^p = \frac{\lambda-\kappa}{1+e_0}\frac{dp}{p} + D\partial\eta^*$ —(17)

彈性變形率 增分式은 Anisotropic Cam-clay model에서 다음과 같다

$\delta\varepsilon_{ij}^e = \frac{\kappa}{3(1+e_0)}\frac{\delta p}{p}\delta_{ij}$

結果的으로 全變形率 增分은 彈性과 塑性成分의 合이므로 다음과 같이 된다

$\delta\varepsilon_{ij} = \delta\varepsilon_{ij}^p + \delta\varepsilon_{ij}^e$ —(18)

2.2.2 Modified Cam-clay

等方連續体가 變形하는 동안에 消散된 일의 增分量은 다음과 같다.

$\delta w = p\cdot\delta v^p + q\delta\varepsilon^p$

$\equiv (\sigma_{ij}\cdot\delta\varepsilon_{ij}^p)$ —(1)

等方応力 (q=0) 아래서는 剪斷變形이 없다고 假定한 (dε=0) Original Cam-clay model과는 다른 觀点에서 다음과 같은 式을 誘導한다.

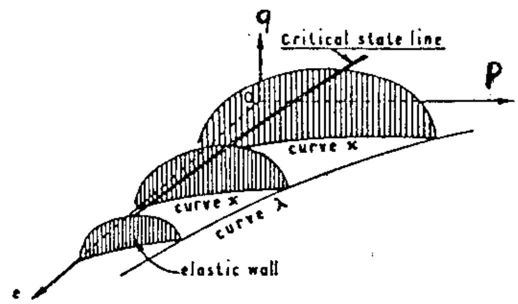


Fig. 3 - Limit state (yield) surface of modified Cam-clay model

等方応力으로 圧密하는 假定에서는 (1)式은 다음과 같이 된다

$(\delta w)_{q=0} = p\cdot\delta v^p$ —(2)

또한 限界狀態에서는 $\frac{q}{p} = M$ 이고 $\delta v^p = 0$ 이므로 式(1)은 다음과 같이 된다.

$(\delta w)_{q=Mp} = p\cdot M\,\delta\varepsilon^p$ —(3)

여기서 $q = \frac{3}{\sqrt{2}}\tau_{oct} = \sqrt{3J_{2D}}$

$p = \frac{J_1}{3} = (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})/3$

$J_{2D} = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij}$

S_{ij} = 差応力 Tensor 이다

降伏函数 F는 $p \cdot q \cdot v^p$ (塑性体積変形率)의 函数이므로
全微分을 取하면

$$dF = \frac{\partial F}{\partial p} dp + \frac{\partial F}{\partial q} dq + \frac{\partial F}{\partial v^p} dv^p = 0 \qquad -(12)$$

로 求한다

이것은 dp와 dq의 応力増分에 의하여 dv^p라는 塑性体積変形率이 加工硬化해서 応力状態가 후속의 降伏曲面에 到達하는것을 意味하고 있다

그래서 弾性 Matrix D^E에 의한 応力増分과 弾性変形率의 関係式은

$$d\sigma_{ij} = D^E d\varepsilon_{ij}^E \qquad -(13)$$

Associated flow rule과 Normality rule에 따르는 塑性変形率 vector의 方向을 고려한 式

$$d\varepsilon_{ij}^p = \Lambda A_{ij} \qquad -(14)$$

여기서 $A_{ij} = \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial \sigma_{ij}}$

Q = plastic potential

降伏函数 F의 기울기는 다음과 같다.

$$B_{ij} = \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial \sigma_{ij}} \qquad -(15)$$

式(12)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$dF = B_{ij} d\sigma_{ij} + \frac{\partial F}{\partial v^p} dv^p = 0 \qquad -(16)$$

$$d\varepsilon_{ij}^e = d\varepsilon_{ij} - d\varepsilon_{ij}^p \qquad -(17)$$

$$\therefore d\sigma_{ij} = C_{ijkl}(d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon_{kl}^p) \qquad -(18)$$

여기서 C_{ijkl} 는 弾性変形에 대한 構成法則이다

式(18)을 式(16)에 代入하면

$$dF = B_{ij} C_{ijkl} (d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon^p_{kl}) + \frac{\partial F}{\partial v^p} dv^p$$

$$= B_{ij} C_{ijkl} (d\varepsilon_{kl} - \Lambda A_{kl}) + \frac{\partial F}{\partial v^p} \Lambda \frac{\partial F}{\partial p} = 0 \qquad —— (19)$$

$$\left(B_{ij} C_{ijkl} A_{kl} - \frac{\partial F}{\partial v^p} \frac{\partial F}{\partial p}\right) \Lambda = B_{ij} C_{ijkl} d\varepsilon_{kl}$$

여기서 $$\Lambda = \frac{B_{ij} C_{ijkl} d\varepsilon_{kl}}{\left(B_{ij} C_{ijkl} - \frac{\partial F}{\partial v^p} \cdot \frac{\partial F}{\partial p}\right)} \qquad —— (20)$$

式(18)에 (k) 와 (20)을 使用하여 다음 式을 求한다

$$d\sigma_{ij} = \left\{ C_{ijrs} - \frac{C_{ijkl} A_{kl} B_{mn} C_{mnrs}}{B_{mn} C_{mnrs} A_{rs} - \frac{\partial F}{\partial v^p} \cdot \frac{\partial F}{\partial p}} \right\} d\varepsilon_{rs} \qquad —— (21)$$

Associative plasticity에 대해서는

$G = F$ 와 $A_{ij} = B_{ij}$ 이므로

Cam-clay model에서 使用하는

$$dv^e = \frac{k}{(1+e_0)} \frac{dp_0}{p_0} \qquad — (22)$$

$$dv = \frac{\lambda}{(1+e_0)} \frac{dp_0}{p_0} \qquad — (23)$$

$$dv^p = dv - dv^e = \frac{\lambda - k}{1+e_0} \frac{dp_0}{p_0} \qquad — (24)$$

式(24)로 부터

$$\frac{\partial p_0}{dv^p} = \frac{p_0(1+e_0)}{(\lambda - k)} \qquad — (25)$$

$$\therefore \frac{\partial F}{\partial v^p} = \frac{\partial F}{\partial p_0} \frac{\partial p_0}{\partial v^p} = \frac{\partial F}{\partial p_0} \frac{p_0 (1+e_0)}{(\lambda - k)} \qquad — (26)$$

associated flow rule에 대하여 式(20)은

$$\Lambda = \frac{A_{ij} C_{ijkl} d\varepsilon_{kl}}{A_{ij} C_{ijkl} A_{kl} - \Gamma A_{ij}} \qquad — (27)$$

여기서 $\Gamma = \frac{\partial F}{\partial p_0} p_0 \frac{(1+e_0)}{(\lambda - k)}$, $A_{ij} = \frac{\partial F}{\partial p}$

2.3 彈粘塑性 model

粘土의 變形이 時間에 의존한다는 것은 일찍부터 잘 알려진 事實이다. 따라서 많은 硏究가 進行되고 있으며 여러가지 力學 model이 提案되고 있으며 그 中에서 몇가지 要点을 考察하면

a. Yong과 Japp의 定變形率 速度 實驗式

$$\sigma_C(\varepsilon,\dot{\varepsilon}) = \sigma_C(\varepsilon,\dot{\varepsilon}_0) + \alpha(\varepsilon)\log(\dot{\varepsilon}/\dot{\varepsilon}_0) \quad —(1)$$

動的應力 基低動的應力 過剩應力

b. Murayama의 應力緩和 實驗式

$$\sigma_R(\varepsilon,t) = \sigma_R(\varepsilon,t_1) - \beta(\varepsilon)\log(t/t_1) \quad —(2)$$

c. Akai 等의 實驗結果

$$\beta(\varepsilon_c) \doteqdot \alpha(\varepsilon_c) \quad —(3)$$

됨을 밝혔고 우리나라 粘土에서도 式(3)이 成立

d. Dilatancy model은 靜的인 狀態라는 假定위에서 세워진것이므로 式(1)의 基低應力部分에 該當한다고 보고

$$v = \frac{\lambda}{1+e_0}\ln\left(\frac{p}{p_0}\right) + [F(\eta) - F(\eta_0)] \quad —(4)$$

式(4)에 strain rate를 고려하면 体積變形率 減小를 가져온다고 보고 다음 式을 가정

$$v = \frac{\lambda}{1+e_0}\ln\left(\frac{p}{p_0}\right) + [F(\eta) - F(\eta_0)] - \alpha\ln\left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_c}\right) \quad —(5)$$

그런데 Sekiguchi (1977)는 体積 creep 方程式을 다음과 같이 나타냈다.

$$v = \frac{\lambda}{1+e_0}\ln\left(\frac{p}{p_0}\right) + D\left(\frac{q}{p} + \eta_0\right) - \alpha\ln\left(\frac{\dot{v}}{\dot{v}_0}\right) \quad —(6)$$

여기서 η_0 : q/p의 初期値

α : 2次壓縮指數

$\dot{v}$: 体積變形率速度

$\dot{v}_0$: 初期体積 変形率 速度

非等方正規圧密粘土를 取扱하기 위해서 η 보다는 η^*를 使用하기로 한다.
그러므로 式(6)은 다음式과 같이 修正한다

$$v = \frac{\lambda}{1+e_0}\ln\left(\frac{p}{p_0}\right) + D\cdot\eta^* - \alpha\cdot\ln\left(\frac{\dot{v}}{\dot{v}_0}\right) \qquad -(7)$$

여기서 初期状態는 荷重이 変한 直後의 状態를 말하며 即 荷重이 変化하기 前에는 一定한 有効応力下에서 Creep를 일으키고 있다는 仮定의 結果이다 微分方程式 (7)을 풀기위해서 荷重이 変한 直後의 各要素의 状態를 規定할 必要가 있다

그리하여 여기서 荷重이 変한 直後는 弾性状態이며 다음式으로 된다고 仮定하자

$$v^e = \frac{\kappa}{1+e_0}\ln\left(\frac{p}{p_0}\right) \qquad -(8)$$

弾性体積変形率 式(8)의 全体積変形率을 빼면 다음式이 구해진다.

$$v^p = v - v^e = \frac{\lambda-\kappa}{1+e_0}\ln\left(\frac{p}{p_0}\right) + D\cdot\eta^* - \alpha\ln\frac{\dot{v}}{\dot{v}_0} \qquad -(9).$$

式(9)를 t에 관해서 풀기위하여 다음과 같이 変形하면

$$v^p = f - \alpha\ln\left(\frac{\dot{v}}{\dot{v}_0}\right) \qquad -(10)$$

여기서 f는 $\frac{\lambda-\kappa}{1+e_0}\ln\left(\frac{p}{p_0}\right) + D\eta^*$ 이고
scalar 函数이다

式(10)을 다음과 같이 変形할 수 있다.

$$\frac{f-v^p}{\alpha} = \ln\frac{\dot{v}}{\dot{v}_0} \qquad -(11)$$

$$\frac{dv}{dt} = \dot{v}_0\, e^{\frac{f-v^p}{\alpha}} = \dot{v}_0\left(e^{\frac{f}{\alpha}}\right)/e^{\left(\frac{v^p}{\alpha}\right)} \qquad -(12)$$

$\frac{dv^e}{dt} = c$ 이므로

$$e^{\frac{v^p}{\alpha}}\frac{dv^p}{dt} = \dot{v}_0\, e^{\left(\frac{f}{\alpha}\right)} \qquad -(13)$$

$$e^{\left(\frac{v}{\alpha}\right)}\frac{dv}{dt} = \dot{v}_0\, e^{\left(\frac{f}{\alpha}\right)} \qquad -(14)$$

윗 式을 積分하면

$$e^{\left(\frac{VP}{\alpha}\right)} = \left(\dot{v}_0 t\, e^{\frac{f}{\alpha}}\right) + C \qquad \text{—(15)}$$

$t=0$ 일때 $VP=0$ 이므로

$$\therefore\ e = \alpha$$

$$e^{\left(\frac{VP}{\alpha}\right)} = \dot{v}_0 e^{\frac{f}{\alpha}} t + \alpha \qquad \text{—(16)}$$

$$e^{\frac{VP}{\alpha}} = \frac{\dot{v}_0 e^{\frac{f}{\alpha}} t}{\alpha} + 1 \qquad \text{—(17)}$$

$$\frac{VP}{\alpha} = \ln\left(1 + \left(\frac{\dot{v}_0 t}{\alpha}\right) \exp\left(\frac{f}{\alpha}\right)\right) \qquad \text{—(18)}$$

$$\therefore\ F = \alpha \ln\left\{\left(1 + \frac{\dot{v}_0 t}{\alpha}\right) \exp\left(\frac{f}{\alpha}\right)\right\} = VP \qquad \text{—(19)}$$

여기서 F: visco plastic potential로서 Scalar 函數이다

t: 荷重이 變할때부터의 時間이다.

式(19)에서 t를 固定하면

이 式은 有效応力空間에서 하나의 曲面을 나타내고 VP는 소위 Strain 硬化媒介變數로서 作用한다

따라서 여기의 函數 F를 Visco-plastic potential 이라고 간주하는 것은 妥當하다

따라서 이 函數 F의 어떠한 有效応力要素에 대한 導函數는 Visco-plastic 變形의 方向을 決定한다

그리하여 다음과 같이 假定할 수 있다

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{P} = \Lambda \cdot \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}'} \qquad \text{—(20)}$$

또 어떤 有效応力 要素에 대한 F의 導函數와 같은 要素에 대한 F의 導函數와 같은 要素에 대한 f의 導函數의 關係는 다음과 같이 表現된다

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}'} = \left\{1 - \exp\left(\frac{-VP}{\alpha}\right)\right\} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}'} \qquad \text{—(21)}$$

式(19)로 부터 약간의 操作을 하면 t를 除去할 수가 있다.

Λ 값을 決定하기 위하여 $\dot{F} = \dot{V}P$에서

連續的인 Visco plastic 變形에 대한 條件을 假定하면 式(20)은 다음과 같이 規定할 수 있다

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{P} = \dot{v}^{P} \cdot (\partial F/\partial \sigma_{ij}) / (\partial F/\partial p) \quad \text{—(22)}$$

또는 f의 形態로 使用하면

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{P} = \dot{v}^{P} (\partial f/\partial \sigma_{ij}) / (\partial f/\partial p) \quad \text{—(23)}$$

여기서 $\dot{v}^P$는 다음 式으로 주어진다

$$\dot{v}^P = [1 + \exp(-\tfrac{v^P}{\alpha})] \cdot [(\tfrac{A-K}{1-e_0}) \tfrac{\dot{p}}{p} + D \cdot \eta^{*}] + \dot{v}_0 \exp[(f - v^P)/\alpha] \quad \text{—(24)}$$

一般的으로 彈性變形을 받고 있는 粘土는 다음 式으로 表現할 수 있다

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{e} = \frac{k\dot{p}}{3(1+e_0)} \delta_{ij} + \frac{1}{2G} \dot{s}_{ij} \quad \text{—(25)}$$

最終的으로 全變形率速度는 다음과 같이 表現할 수 있다

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^{P} + \dot{\varepsilon}_{ij}^{e} \quad \text{—(26)}$$

한편 變形率速度 Tensor의 有效応力速度 Tensor間에 等方的이고 線形關係를 假定한다면

$$\dot{\sigma}_{ij}' = L\dot{v}^{e}\delta_{ij} + 2G\dot{\varepsilon}_{ij}^{e} \quad \text{—(27)}_1$$

$$= L(\dot{v} - \dot{v}^P)\delta_{ij} + 2G(\dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\varepsilon}_{ij}^P) \quad \text{—(27)}_2$$

여기서 L과 G : Lame 定數, δ_{ij} : 單位 Tensor이다

2-1 節의 式(15)를 $(27)_2$에 代入하여 얻는 關係式을 式(9)에 代入하여 演算을 하면 比例係數 Λ는

$$\Lambda = \frac{L\frac{\partial F}{\partial p}\dot{v} + 2G\frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}'}\dot{\varepsilon}_{kl} + \frac{\partial F}{\partial t}}{L\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)^2 + 2G\frac{\partial F}{\partial \sigma_{mn}'}\frac{\partial F}{\partial \sigma_{mn}'} + \frac{\partial F}{\partial p}} \quad \text{—(28)}$$

따라서 構成式의 最終的인 表現은 式(15) (2.1 節)과 (28)을 $(27)_2$에 代入하므로서

$$\dot{\sigma}_{ij}' = L\dot{v}\delta_{ij} + 2G\dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{\left(L\frac{\partial F}{\partial p}\delta_{ij} + 2G\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}'}\right)\left(L\frac{\partial F}{\partial p}\dot{v} + 2G\frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}'}\dot{\varepsilon}_{kl} + \frac{\partial F}{\partial t}\right)}{L\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)^2 + 2G\frac{\partial F}{\partial \sigma_{mn}'}\frac{\partial F}{\partial \sigma_{mn}'} + \frac{\partial F}{\partial p}} \quad \text{—(29)}$$

윗式을 실제로 使用할때는 粘塑性 potential의 有効応力成分및 經過時間에 관한 偏微係數의 具体的 表現이 必要하기 때문에 이들 偏微係數를 윗式의 f函數와 關聯시키면 便利하다. 即 若干의 演算후 式(19)를 使用하여 경과시간 t를 消去하면 偏微係數는

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}'} = \left[1 - \exp\left(-\frac{vP}{\alpha}\right)\right]\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}'} \quad \text{—(30)}$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \dot{i}\cdot\exp\left(\frac{f - vP}{\alpha}\right) \quad \text{—(31)}$$

또 偏微係數 $\partial F/\partial p$에 대해서는 式(28)을 誘導하는 仮定에서 다음式을 利用하는 것을 보충하였다.

$$\frac{\partial F}{\partial p} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{xx}'} + \frac{\partial F}{\partial \sigma_{yy}'} + \frac{\partial F}{\partial \sigma_{zz}'} \quad \text{—(32)}$$

式(29)~(32)를 2次元 平面변형율 條件 (Z方向 平面拘束)으로 具体的으로 表現하면

$$\begin{Bmatrix} \dot{\sigma}_{xx}' \\ \dot{\sigma}_{yy}' \\ \dot{\sigma}_{zz}' \\ \dot{\sigma}_{xy}' \end{Bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} L+2G & L & 0 \\ L & L+2G & 0 \\ L & L & 0 \\ 0 & 0 & L \end{bmatrix} - \frac{C_3}{C_4}\begin{bmatrix} C_1^2 & C_1C_2 & 2G f_{xy} C_1 \\ C_1C_2 & C_2^2 & 2G f_{xy} C_2 \\ C_1C_3 & C_2C_3 & 2G f_{xy} C_3 \\ 2G f_{xy} C_1 & 2G f_{xy} C_2 & 4G^2 f_{xy}^2 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_{xx} \\ \dot{\varepsilon}_{yy} \\ \dot{\gamma}_{xy} \end{bmatrix} - \frac{C_6}{C_4}\begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ 2G f_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{—(33)}$$

또 윗式에 使用된 記号는 아래와 같다.

$$f_{xy} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{xy}'}$$

$$C_1 = L\frac{\partial f}{\partial p} + 2G\frac{\partial f}{\partial \sigma_{xx}'}$$

$$C_2 = L\frac{\partial f}{\partial p} + 2G\frac{\partial f}{\partial \sigma_{yy}'}$$

$$C_3 = L\frac{\partial f}{\partial p} + 2G\frac{\partial f}{\partial \sigma_{zz}'}$$

$$C_4 = \left[L\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)^2 + 2G\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{xx}'}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{yy}'}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{zz}'}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{xy}'}\right)^2\right\}\right]C_5 + \frac{\partial f}{\partial p}$$

$$C_5 = 1 - \exp\left(-\frac{v^p}{\alpha}\right)$$

$$C_6 = \frac{\partial F}{\partial t} = \dot{v}_0 \exp\left(\frac{f - v^p}{\alpha}\right)$$

다만 函數 f의 有效應力成分에 관한 偏微係數는

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}'} = \frac{D}{3p}\left\{\frac{\lambda-\kappa}{D(1+e_0)} - \eta^*\right\}\delta_{ij} + \frac{3}{2}\frac{D}{p}\frac{S_{ij}}{q_s}$$

$$\frac{\partial f}{\partial p} = \frac{D}{p}\left\{\frac{\lambda-\kappa}{D(1+e_0)} - \eta^*\right\}$$

Lame 定數 L · G에 대하여는 종래의 試驗結果를 參考로 하여 다음 式으로 變動하는 土質定數로 보았다.

$$\left.\begin{aligned} L &= \frac{p(1+e_0)}{\kappa} - \frac{2}{3}G \\ G &= G_0 \exp\left(-\frac{e-e_0}{\lambda}\right) \end{aligned}\right\} \quad -(34)$$

여기서 G_0는 初期剛性率이다.

彈粘塑性構成式 (33)의 特別한 경우, 即 粘土의 Creep 特性을 無視할 때에는 2次壓縮指數 $\alpha=0$ 및 $\partial F/\partial t=0$로 解하여 $C_5=1$ 및 $C_6=0$로 하면 式 (33)은 彈塑性構成式에 돌아간다.
이경우 函數 f는 即 original Cam-clay model에서의 塑性 potential 函數와 等價이고 $f=v^p$로 되는 關係式은 等方硬化降伏條件을 주게 된다.
또 彈性狀態에서의 構成式을 얻기 위해서는, $v^p=0$ 및 $\partial F/\partial t=0$로 解하여 $C_5=0$ 및 $C_6=0$으로 하면 좋다.

3. 圧密解析의 有限要素式

彈粘塑性 model 을 使用한 有限要素式은 plain strain 조건에서 다음과 같이 유도한다.

変位増分 ΔU_x, ΔU_y 를 成分으로 하는 Vector 는 (Δu) 로 表示하며, 平衡方程式을 만족하는 全応力増分 $\{\Delta\sigma\}^T = \{\Delta\sigma_{xx}\ \Delta\sigma_{yy}\ \Delta\tau_{xy}\}$ 에 대해 仮想일의 原理를 이용하면

$$\int_V \{\Delta\bar{\varepsilon}\}^T\{\Delta\sigma\}\,dV = \int_V \{\Delta\bar{\varepsilon}\}^T\{\Delta\sigma'\}\,dV + \int_V \{\Delta\bar{\varepsilon}\}^T\{\Delta P_w\}\,dV = \int_V \{\Delta\bar{u}\}^T\{\Delta F_b\}\,dV$$

$$+ \int_S \{\Delta\bar{u}\}^T\{\Delta T_s\}\,ds \quad \cdots\cdots (1)$$

여기서,

$\{\Delta\bar{\varepsilon}\}$: $\{\Delta\varepsilon_x,\ \Delta\varepsilon_y\ \ \Delta\gamma_{xy}\}$

$\{\Delta\sigma'\}$: $\{\Delta\sigma_x'\ \ \Delta\sigma_y'\ \ \Delta\tau_{xy}\}$

$\{\Delta P_w\}^T$: $\{\Delta P_w\ \ \Delta P_w\ \ 0\}$

$\{\Delta F_b\}$: 物体力 増分 Vector.

$\{\Delta T_s\}$: 表面力 増分 Vector.

要素内의 任意点에서 変位 増分 $\{\Delta u\}$ 는 節点変位 増分 $\{\Delta u^*\}$ 으로부터 形状函数 $[N]$ 을 이용하여 다음과 같이 表現 한다.

$$\{\Delta u\} = [N]\{\Delta u^*\} \quad \cdots\cdots (2)$$

윗식에 対応해서 要素内의 任意의 点 의 変形率 増分 $\{\Delta\varepsilon\}$ 과 体積変形率 増分 ΔV 는 節点変位増分 과 관계 시킬수 있다.

$$\{\Delta\varepsilon\} = [B]\{\Delta u^*\} \quad \cdots\cdots (3)$$

$$\Delta V = \{B_v\}^T\{\Delta u^*\} \quad \cdots\cdots (4)$$

一般的인 과잉간극수압 増分 Vector $\{\Delta P_w\}$ 는 要素内의 中心의 과잉간극수압 増分値 ΔP_w^* 를 利用하여

$$\{\Delta P_w\}^T = \{1\,1\,0\}\,\Delta P_w^* \quad \cdots\cdots (5)$$

有効応力増分 $\{\Delta\sigma'\}$ 와 変形率 増分 $\{\Delta\varepsilon\}$ 을 다음과 같이 관계 시킬수 있다.

$$\{\Delta\sigma'\} = [D_{ep}]\{\Delta\varepsilon\} - \{\Delta\sigma^r\} \quad \cdots\cdots (6)$$

여기서 $\{Dep\}$: 3行 3列의 대칭行列 이며
彈·粘塑性係數
$\{\Delta\Gamma^r\}$: 緩和応力增分 Vector.

式 (2) ~ (6) 을 (1) 式에 代入하고 仮想変位를 任意로 선택한것을 고려하면

$$\{K\}\{\Delta u^*\} + \{K_v\}\Delta P_w^* = \{\Delta Q\} \quad \cdots\cdots (7)$$

여기서

$$\{K\} = \int_v \{B\}^T\{Dep\}\{B\}\,dv \quad \cdots\cdots (8)$$

$$\{K_v\} = \int_v \{B_v\}\,dv \quad \cdots\cdots (9)$$

$$\{\Delta Q\} = \int_v \{N\}^T\{\Delta F_b\}\,dv + \int_s \{N\}^T\{\Delta T_s\}\,ds + \int_v \{B\}^T\{\Delta\Gamma^r\}\,dv \quad \cdots\cdots (10)$$

다음은 연립방정식에 대해 생각해 보면

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\gamma_w}\left(k_x\frac{\partial^2 P_w}{\partial x^2} + k_y\frac{\partial^2 P_w}{\partial y^2}\right) = 0 \quad \cdots\cdots (11)$$

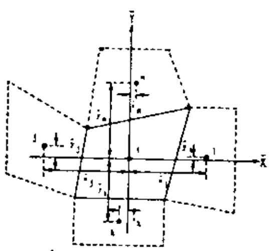


Fig. 4 Local co-ordinate used in evaluating rate of flow

정의에 의하면 要素内의 体積変化는 다음과 같다.

$$\Delta V = \{k_v\}^T\{\Delta u^*\} \quad \cdots\cdots (12)$$

(11) 式에서 計算된 体積変化量을 (12) 式에 代入하면 (7) 式과 (12) 式은 $\{\Delta u^*\}$ 와 P_w^* 을 미지수로한 연립방정식을 만든다.
그리하여 $\Delta\Gamma$ 을 계산하고 圧密進行 과정에 따라서 단계적으로 연립방정식을 풀면 圧密解를 얻을수 있다.
方程式 (11)을 차분법에 의해 풀기 위해서 (13)식에 의해서 정의되는 과잉간극수압 P_w는 Christian and Boehmer (1970)에 의해서 다음 (14)식과 같이 주어졌다.

$$P_w^* = \{(1-\theta)\,P_{wt} + \theta\,P_{wt+\Delta t}\} \quad \cdots\cdots (13)$$

$$P_w^* = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 y^2 \quad \cdots\cdots (14)$$

여기서 P_{wt} : $t = t$ 일때 과잉 간극 수압.
$P_{wt+\Delta t}$; $t = t+\Delta t$ 일때 과잉간극수압.
$\theta\,(0 \leq \theta \leq 1)$; 차분 근사 상수.

$\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4\ \alpha_5$ 값은 그림에서와 같이 사변형 要素 i와 이 要素를 둘러싸고 있는 j, k, l, m의 要素에 의해서 결정 되어야 하는 미정계수 이다.

요소 중앙점의 과잉간극수압 Vector $\{P_w^*\}$는 다음과 같다.

$$\{P_w^*\} = \left\{\begin{matrix} P_{wi}^* \\ P_{wj}^* \\ P_{wk}^* \\ P_{wl}^* \\ P_{wm}^* \end{matrix}\right\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \bar{x}_j & \bar{y}_j & \bar{x}_j^2 & \bar{y}_j^2 \\ 1 & \bar{x}_k & \bar{y}_k & \bar{x}_k^2 & \bar{y}_k^2 \\ 1 & \bar{x}_l & \bar{y}_l & \bar{x}_l^2 & \bar{y}_l^2 \\ 1 & \bar{x}_m & \bar{y}_m & \bar{x}_m^2 & \bar{y}_m^2 \end{bmatrix} = B\alpha \quad \cdots\cdots (15)$$

그러면 $\alpha = B^{-1}\{P_w^*\}$ $\cdots\cdots (16)$

(14)式을 (11)式에 代入하고 (16)式을 고려하면, 다음式을 얻을수 있다.

$$\Delta V = -\frac{\Delta t V}{\gamma_w}(2k_x\alpha_4 + 2k_y\alpha_5)$$

$$= -\frac{2\Delta t V}{\gamma_w}(k_x b_4^T + k_y b_5^T) P_w^*$$

$$= -\{K_v\}^T\{P_w^*\} \quad \cdots\cdots (17)$$

여기서 $[K_v]^T = \left(\frac{2\Delta t V}{\gamma_w}\right)(k_x b_4 + k_y b_5)$

Δt : 시간 증분량.

V : 요소체적.

b_4, b_5는 B^{-1}의 4행과 5행 Vector.

$\Delta P_w = P_{wt+\Delta t} - P_{wt}$ 의 관계를 使用하고 (13)式에서 $\theta = 1$로 하여 (17)式을 (12)式에 代入하여 變形하면 다음 式을 얻는다.

$$\left.\begin{matrix} \{K\}\{\Delta U^*\}_j + \{K_v\}P_{wj}^* = [\Delta Q]_i + [K_v]P_{wj-1}^* \\ \{K_v\}^T\{\Delta U^*\}_j = -\{K_v\}^T P_{wj-1}^* \end{matrix}\right] \cdots\cdots (18)$$

여기서 요구되는 形式은 사변형 요소이고 수치해석 과정에서 4개의 삼각형 요소로 이루어진 4변형 요소는 Wilson (1965) 이 제안한 方法에 의해서 Quadrilateral element 를 다음과 같이 static condensation 한다.

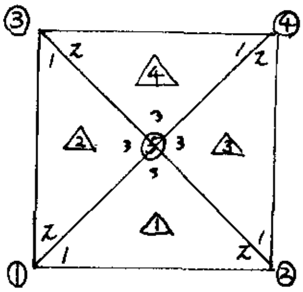


Fig 5 Static condensation

$$\{K\}\{q\} = \{Q\} \quad \cdots\cdots (19)$$

$$\left\{\begin{array}{c:c} [K_{pp}] & [K_{ip}] \\ \hdashline [K_{ip}]^T & [K_{ii}] \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{c} q_p \\ q_i \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} [Q_p] \\ \hdashline [Q_i] \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots (20)$$

(20) 式에서 $\{q_i\}$ 을 구하면

$$\{q_i\} = \{K_{ii}\}^{-1}\{[Q_i] - [K_{ip}]^T[q_p]\} \quad \cdots\cdots (21)$$

(21) 式을 (20)式에 代入하면

$$\{[K_{pp}] - [K_{ip}][K_{ii}]^{-1} \cdot [K_{ip}]^T\}\{q_p\} = \{Q_p\} - \{K_{ip}\}\{K_{ii}\}^{-1}\{Q_i\} \quad \cdots\cdots (22)$$

$$\{\bar{K}\}\{q_p\} = \{\bar{Q}\} \quad \cdots\cdots (23)$$

이와 같은 방법을 使用하여 사변형 요소의 중앙 절점은 소거되고 응력이나 과잉간극 수압은 1개의 사변형 요소안에서는 항상 일정한 값이 된다.

4 有限要素法에 의한 圧密解析의 適用例.

여기서는 圧密解析의 適用例로써 彈塑性및 彈粘塑性의 圧密解析을 施行하여 그 結果를 소개하고 앞으로의 研究方向을 記述하고자 한다.

4.1 試験盛土의 解析에 의한 適用例

本 解析의 精度를 알아보기 위해서 France의 Cubzac-les-ponts에서 試験盛土하여 実測한 結果를, Sandhu-wilson 方法과 Christian-Boehmer 方法에 의한 解析의 結果와 다음 사항을 比較하였다.

가) 盛土中央部의 沈下및 間隙水圧.

나) 盛土法面끝 部分의 側方变位.

다) 載荷直后와 1000日 后의 경우.

또 Christian-Boehmer 方法만에 의하여 盛土時 非排水條件과 排水條件을 使用하여 위의 項目을 比較하였으며 마지막으로 mesh를 使用한 경우와 使用하지 않는경우의 同一한 事項을 比較하였으며 解析에 使用한 土質定数와 FEM Grid는 다음과 같다.

Table-3 계산에 사용한 토질정수

층	λ	K	M	C_α	G_0	ν	σ'_{vc}	K_{oc}	σ'_{vo}	K_o	e_o	γ_t	V_o	λ_K	K_{xo}	K_{yo}
1	0.5	0.005	1.2	0.0000	535.2	0.4	85.60	0.5	5.14	0.5	2.00	2.14	0.0	0.005	1.0	1.0
2	0.12	0.017	1.2	0.0012	94.8	0.4	8.00	0.5	2.37	0.5	1.00	1.73	1.0E-5	0.12	2.6E-4	0.864E-4
3	0.53	0.022	1.2	0.0033	170.4	0.4	6.94	0.5	3.05	0.5	2.60	1.63	1.0E-5	0.53	2.6E-4	0.864E-4
4	0.75	0.085	1.2	0.0055	40.8	0.4	4.67	0.5	3.80	0.5	3.22	1.43	1.0E-5	0.75	2.6E-4	0.864E-4
5	0.53	0.048	1.2	0.0033	68.3	0.4	5.18	0.5	4.26	0.5	2.24	1.53	1.0E-5	0.53	2.6E-4	0.864E-4
6	0.52	0.039	1.2	0.0032	107.1	0.4	6.20	0.5	5.82	0.5	2.31	1.53	1.0E-5	0.52	2.6E-4	0.864E-4
성토	0.52	0.048	1.2	0.0032	105.0	0.4	7.63	0.5	6.64	0.5	2.20	1.58	1.0E-5	0.52	2.6E-4	0.864E-4

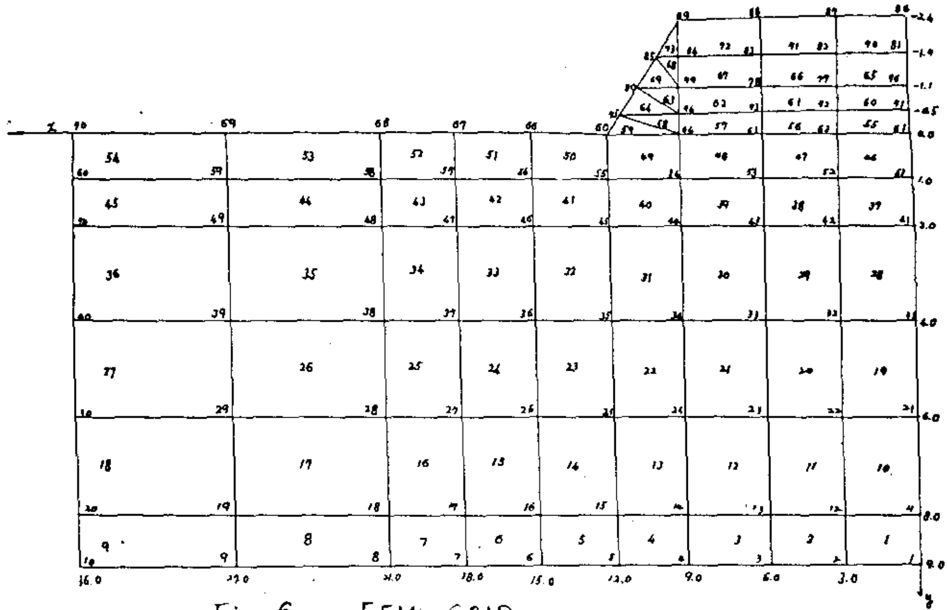


Fig 6 FEM GRID

4.1.1 S.W 과 C.B 方法의 比較結果.

水平変位 에 있어서 S.W 과 C.B 방법은 둘다 실측치 와 큰 차이를 나타낸다.
이 같은 것은 mesh 를 사용하지 않아 큰 차이를 가져온다.
수직 변위에서는 두방법 모두 실측치에 접근하나 S.W 방법이 더 접근하고,
과잉간극 수압에 있어서도 큰 차이를 나타낸다.

4.1.2. 성토시 배수조건과 비배수 조건의 비교.

수평변위에 있어서는 두방법 모두 실측치에 가까우나 수직변위와 과잉간극 수압에 있어서는 실측치와 상당한 차이를 갖는다. 비배수 조건이 실측치에 더 접근한다.

4.1.3. 성토 Mesh 를 사용한 경우와 사용하지 않은 경우.

성토 mesh를 사용한 경우는 실측치에 거의 근접하는데 사용하지 않은 경우는 실측치와 상당한 차이를 갖는다.

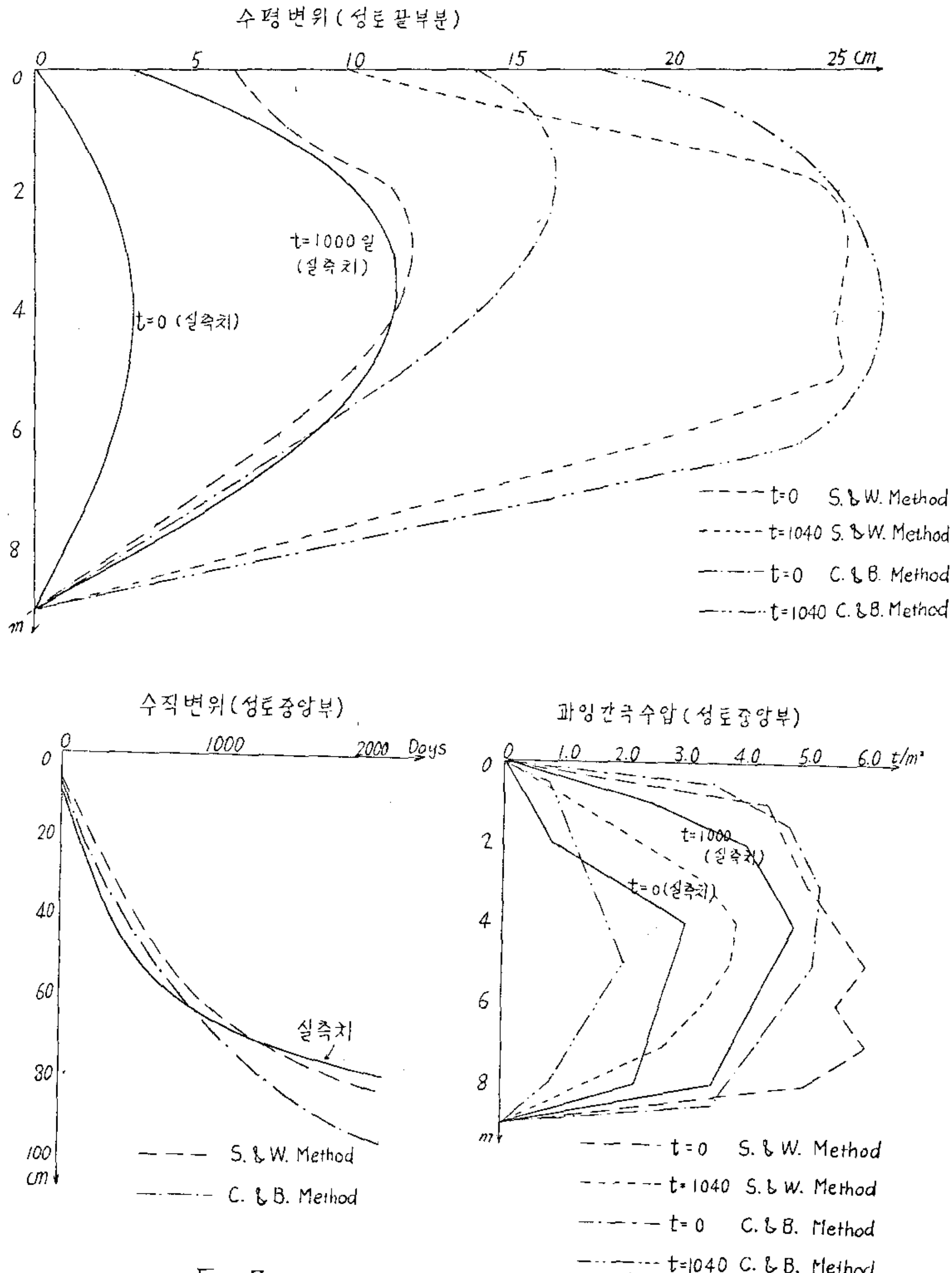

수평변위(성토끝부분)
0
5
10
15
20
25 cm
2
4
6
8
m
t=1000일
(실측치)
t=0 (실측치)
t=0 S.&W. Method
t=1040 S.&W. Method
t=0 C.&B. Method
t=1040 C.&B. Method
수직변위(성토중앙부)
1000
2000 Days
20
40
60
80
100
cm
실측치
S.&W. Method
C.&B. Method
과잉간극수압(성토중앙부)
1.0
2.0
3.0
4.0
5.0
6.0 t/m²
t=1000
(실측치)
t=0(실측치)
t=0 S.&W. Method
t=1040 S.&W. Method
t=0 C.&B. Method
t=1040 C.&B. Method

Fig. 7

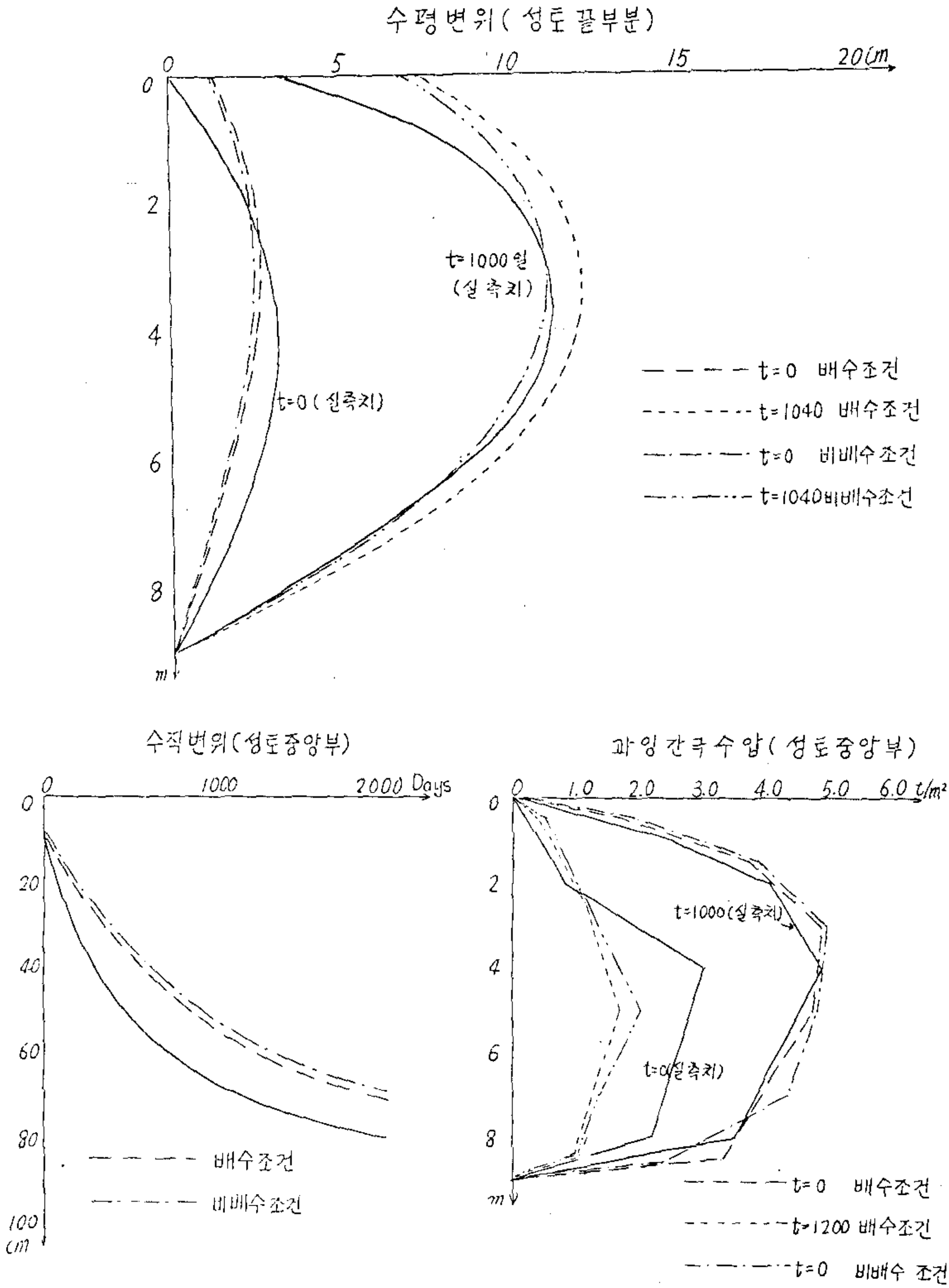
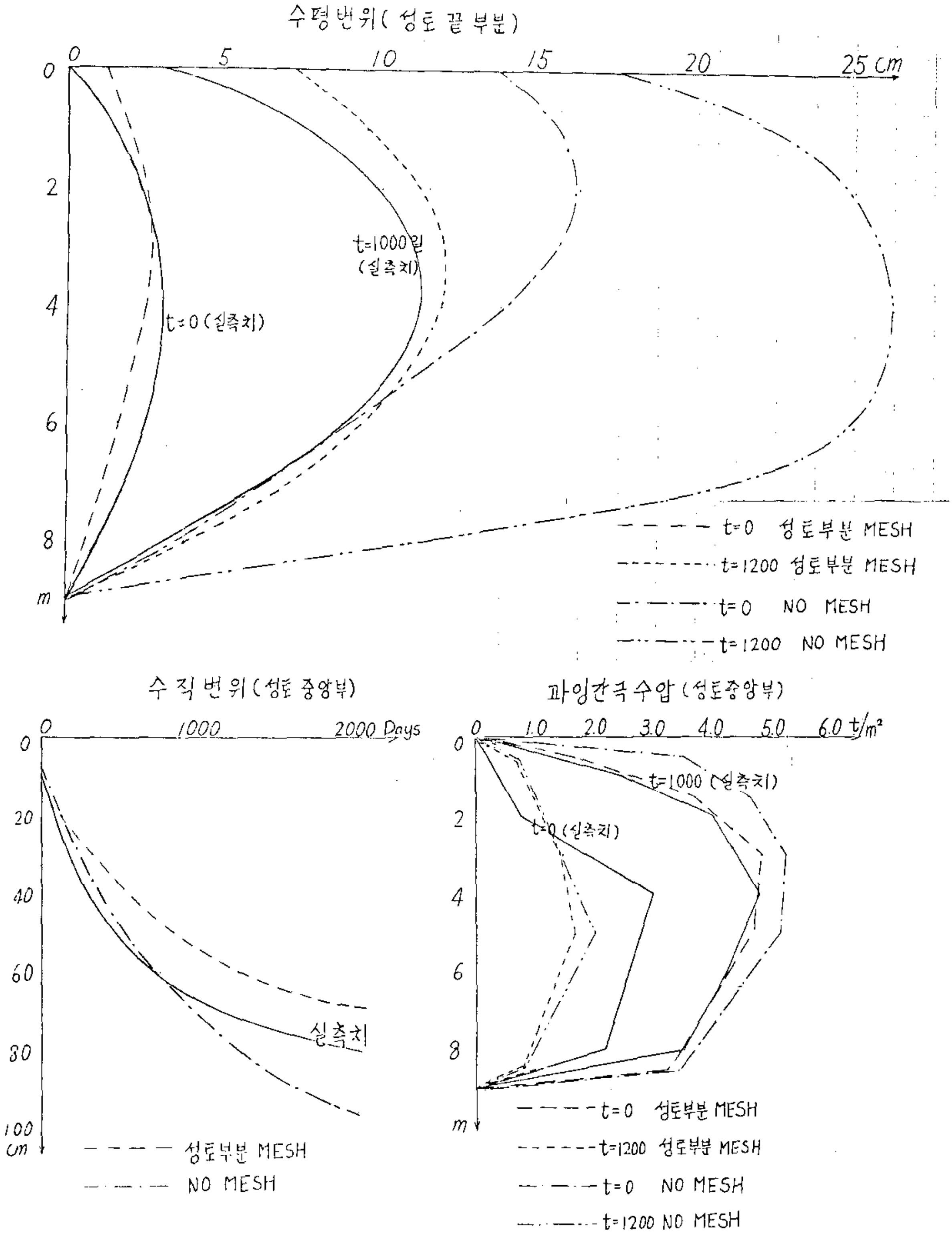

수평변위(성토끝부분)
0 5 10 15 20cm
0 2 4 6 8 m
t=1000일 (실측치)
t=0 (실측치)
t=0 배수조건
t=1040 배수조건
t=0 비배수조건
t=1040비배수조건
수직변위(성토중앙부)
0 1000 2000 Days
0 20 40 60 80 100 cm
배수조건
비배수조건
과잉간극수압(성토중앙부)
0 1.0 2.0 3.0 4.0 5.0 6.0 t/m²
0 2 4 6 8 m
t=1000(실측치)
t=0(실측치)
t=0 배수조건
t=1200 배수조건
t=0 비배수 조건
t=1200 비배수 조건

Fig 8



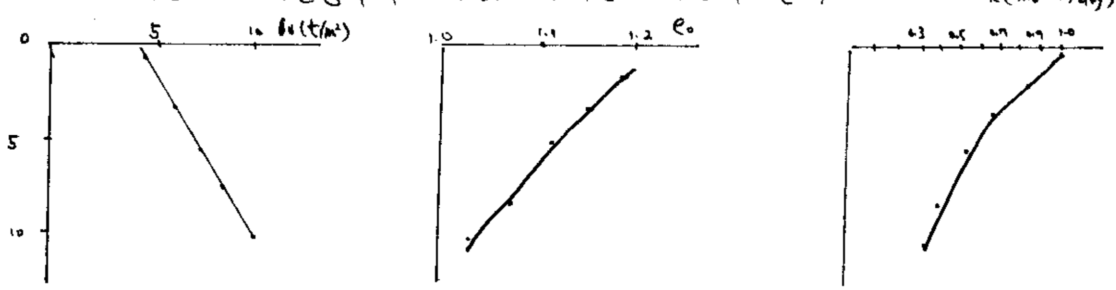
수평변위(성토 끝 부분)
0 5 10 15 20 25 cm
0 2 4 6 8 m
t=1000일 (실측치)
t=0 (실측치)
t=0 성토부분 MESH
t=1200 성토부분 MESH
t=0 NO MESH
t=1200 NO MESH
수직변위(성토 중앙부)
0 1000 2000 Days
0 20 40 60 80 100 cm
실측치
성토부분 MESH
NO MESH
과잉간극수압(성토중앙부)
0 1.0 2.0 3.0 4.0 5.0 6.0 t/m²
0 2 4 6 8 m
t=1000 (실측치)
t=0 (실측치)
t=0 성토부분 MESH
t=1200 성토부분 MESH
t=0 NO MESH
t=1200 NO MESH

Fig. 9.

4.2. Sheet pile 에 의한 軟弱地盤 補強.

Sheet-pile을 粘土地盤中에 설치 하였을때 그 영향을 알아보기 위해서 Sheet-pile을 설치하지 않은 경우와 설치하였을 경우, Joint Element를 使用했을 경우 와 사용하지 않은 경우에 대해 지표면 침하 및 측방변위, 극한 지지력 등을 비교하였다.

여기에 사용한 토질정수와 FEM Grid는 다음과 같다.



$\lambda = 0.14$　　$K = 0.013$　　$M = 1.38$　　$K_0 = 0.597$.

Fig.10. Material parameter used.

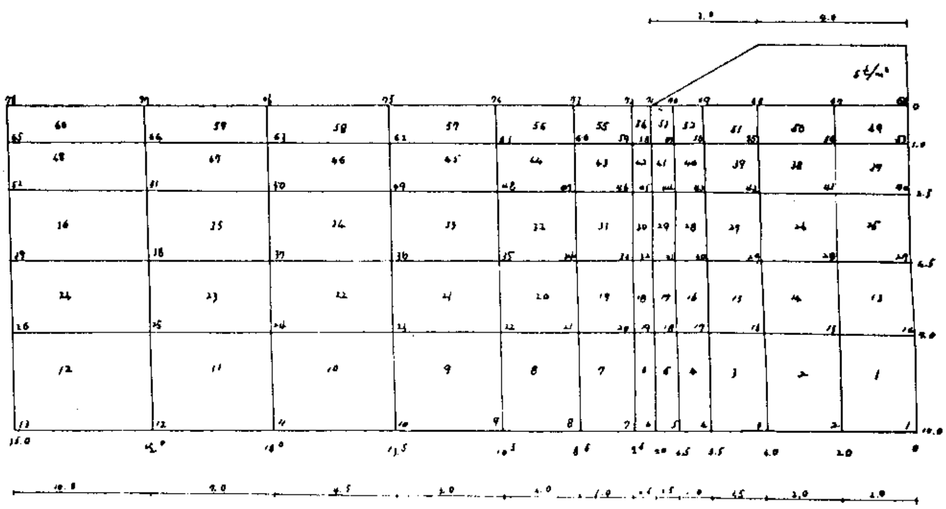


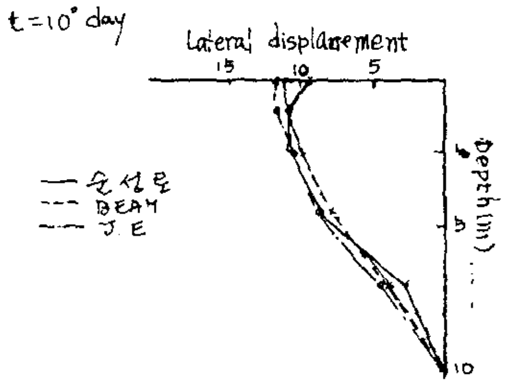
Fig 11. FEM Grid

4.2.1. 지표면 침하 및 측방변위 비교.

다음 Fig 13 은 각각 비배수 상태에서 재하하는 경우 순성토, 矢板타설, Joint Element를 삽입한 矢板 타설시의 침하와 측방변위를 나타낸 것이며, Fig 12 는 소정의 성토하중을 재하직후(非排水)와 圧密完了時($t=10^4$ day)의 地表面 沈下와 矢板部에서의 측방변위를 비교하여 나타낸 것인데 재하 직후에는 순성토가 대체로 큰 침하를 나타내고 압밀완료시는 Joint Element를 사용했을 경우가 침하가 크게 나타난다.
矢板部에서의 側方変位는 Joint Element를 이용하는 경우에 변위가 크게 나타나고 있다.

4.2.2. 극한 지지력 비교.

- 地盤의 극한지지력은 ① 盛土荷重과 盛土斜面 끝의 水平変位의 比로써 검토하는 방법과 ② 沈下－荷重曲線에서 구하는 통상의 방법으로 검토하고 있다.
- 극한 지지력은 矢板을 사용하는 경우 더 크고 사용하지 않은 경우가 작으며 Joint Element를 넣어 해석한 결과는 이중간에 들어간다. 이것은 Joint Element를 고려하지 않고 해석하는 결과는 실제보다 위험측이라는 것을 의미한다.



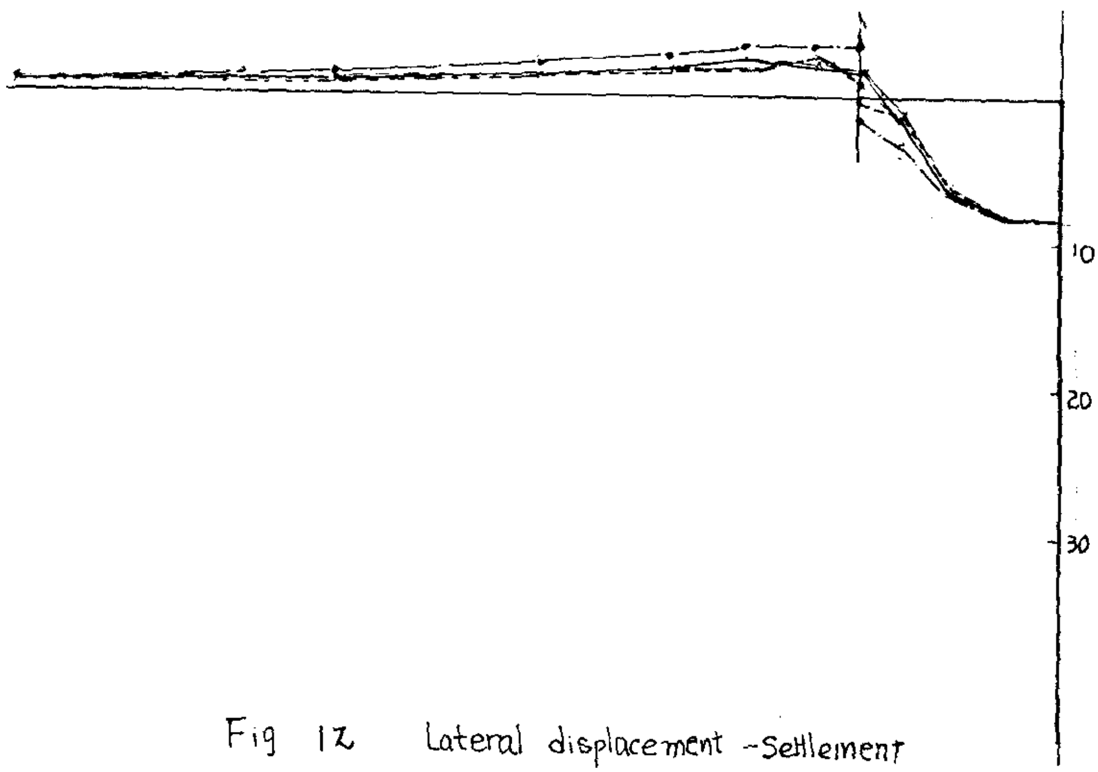


Fig 12 Lateral displacement -Settlement

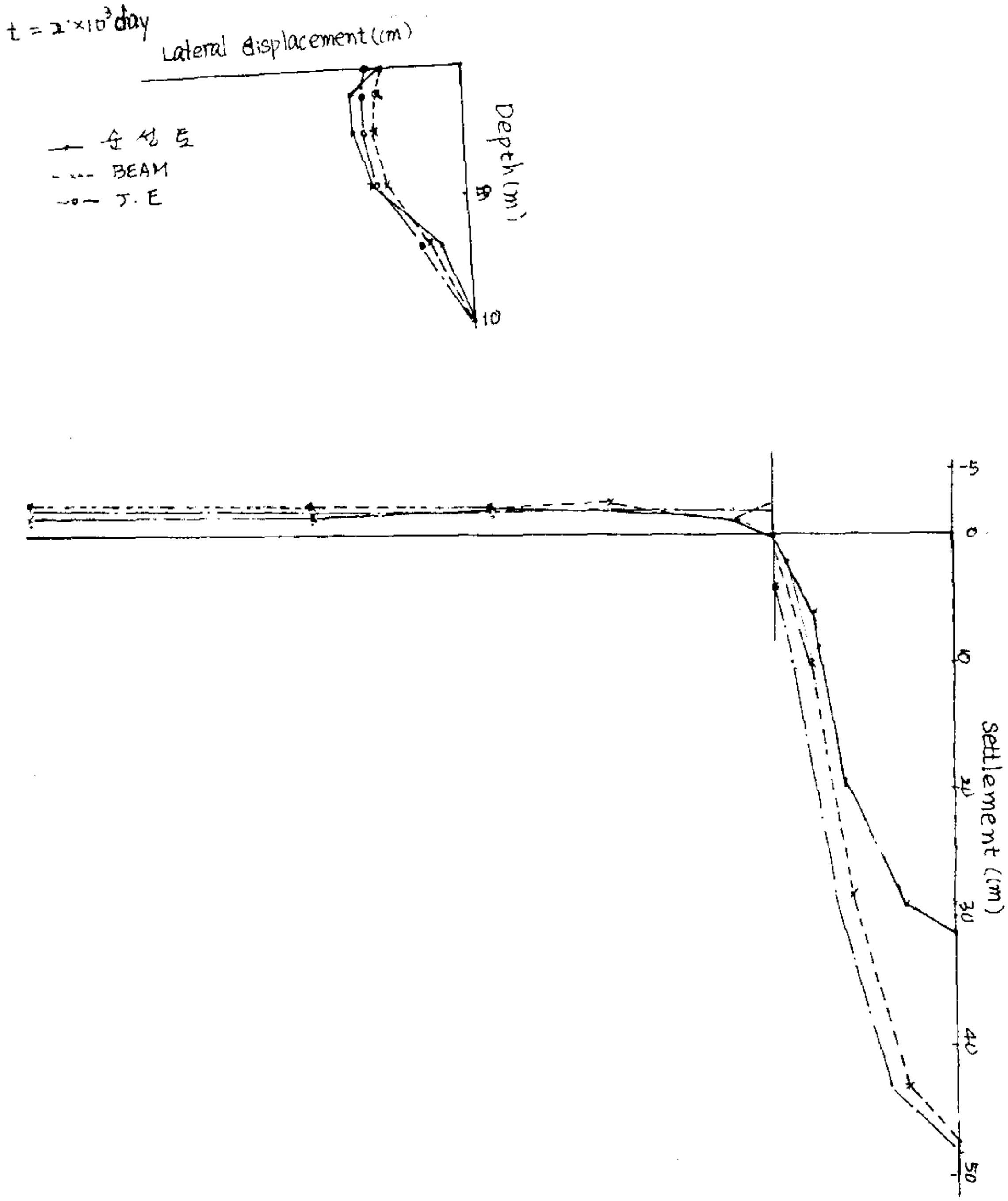


Fig 13   Lateral displacement - Settlement

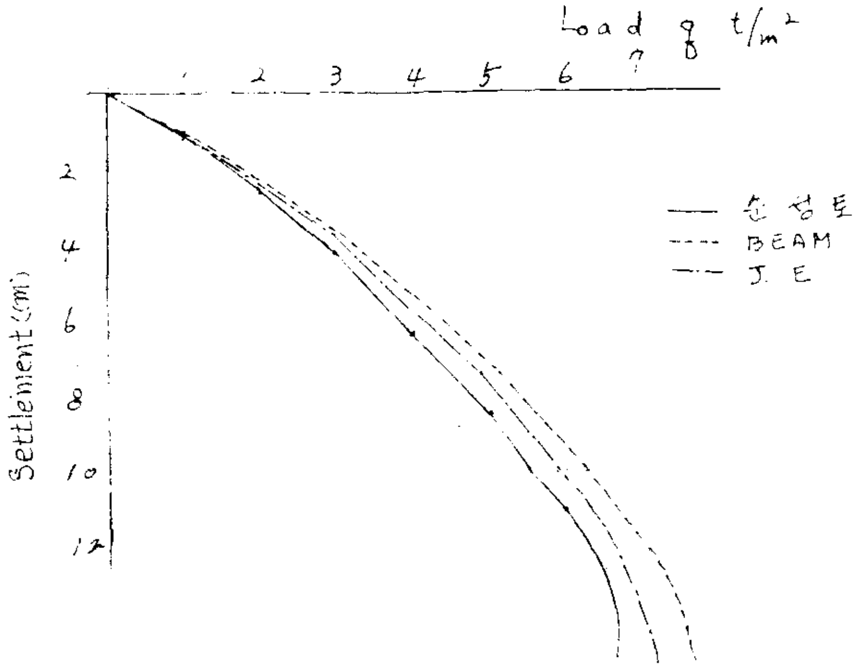


Fig 14 Load - Settlement Curve

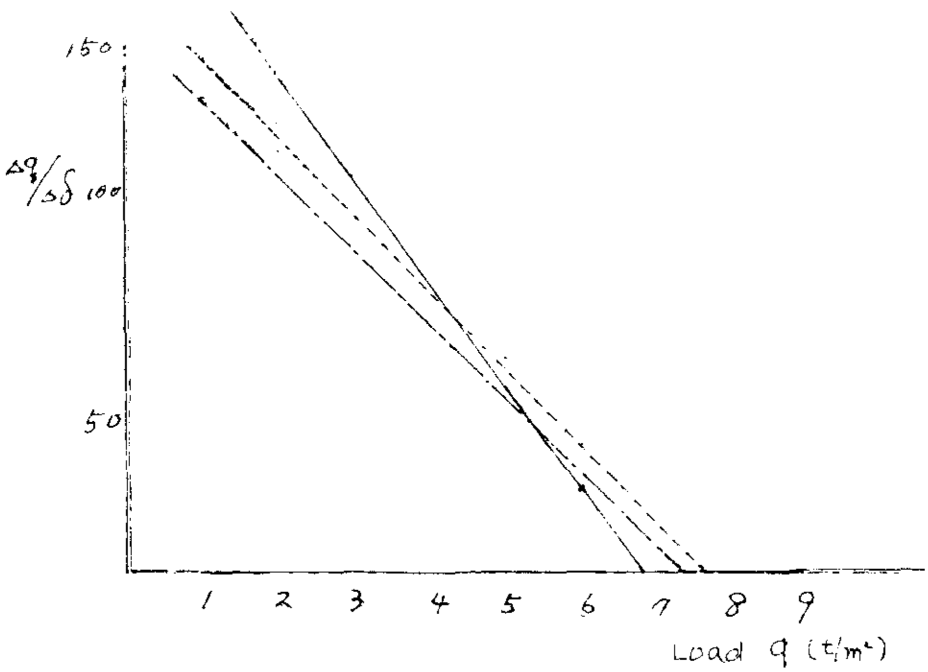


Fig. 15. leteral displacement - load relationship.

4.3. 研究方向 및 展望

以上와 같이 多次圧密의 数値解析에 관해서 고찰하여 보았다.
이제 解析의 단계를 지나서 応用함에 있어서

本技法은
- 사면안정
- 복합지반의 지지력 추정 (Sand drain. Sand compaction pile.
- Tunnel의 굴착문제

등에 사용하면 좋은 결과를 얻을 것으로 확신하는 바이다.

<REFERENCES>

Atkison, J.H. and Bransby, P.L (1978): "The mechanics of soils. An introduction to critical state soil mechanics," McGraw-Hill.

Biot, M.A. (1941): "General of deformation of three-dimensional consolidation". Journal of applied physics, Vol. 12, p.p. 155-164.

Biot, M.A. (1941): "General of deformation of three-dimensional consolidation". Journal of applied physics, Vol. 26, p.p. 182~185.

Biot, M.A. (1956): "General solution of equations of elasticity and consolidation for a porous material," Journal of applied mechanics.

Biot, M.A.: "Theory of deformation of a porous visco-elastic anisotropic solid". Journal of applied physics, Vol. 27, PP. 240-253.

Booker, J.R.; Carter, J.P. and Small, J.C. (1976). "An efficient method of analysis for the drained and undrained behaviour of an elastic soil." International journal of solids and structures, Vol. 12, PP. 589-599.

Booker, J.R. and Small, J.C. (1975): "The economical solution of elastic problems for a range of poisson's ratio". International journal for numerical methods in engineering, Vol. 9, PP. 847-853.

Booker, J.R. and Small, J.C (1975): "An investigation of the stability of numerical solutions of Biot's equations of consolidation". International journal of solids and structures, Vol. 11, pp. 907-917.

Burland, J.B (1965): "The yielding dilation of clay", correspondence, geotechique. Vol. 15. PP. 211~214.

Christian, J.T and Boehmer, J.W. (1970): "Plane strain consolidation by finite elements". Journal of the soil mechanics and foundation division, ASCE, No. 96. SM4, July 1970, PP. 1435-1457

Christian, J.T (1968): "Undrained stress distributions by numerical method". Journal of the soil mechanics and foundations division, ASCE, NO. SM 6. Nov. 1968, PP. 1333-1344.

Cryer, L.W. (1963): " A comparison of the three-dimensional consolidation theories of Biot and Terzaghi Mech. and Appl. Math

Hwang. C.T., Morgenstern. N.R. and Murray. D.W. (1971): "On solutions of plane strain consolidation problems by finite element methods", Canadian Geotechnical Journal, 8, No.1, PP. 109-118.

Kochi AKAI and Takeshi TAMURA: "Numerical Analysis of multi-dimensional consolidation accompanied with elasto-plastic constitutive equation."
日本土木学会論文報告集 Vol 269. PP. 95-104. 1978.

Mandel. J. (1953): "Consolidation des sols (etude mathematique)". Geothechnique, Vol. III, PP. 287-299.

Matsui, T and N. Abe (1981): "Multi-dimensional elasto-Plastic consolidation analysis by finite element methods, soils and founds. Vol. 21. No. 1. PP. 79-95.

Naghdi, P.M. (1960): "Stress-strain relations in plasticity and thermoplasticity," proc. 2nd symposium on Naval structure Mechanics, pergamon press. pp. 121-169.

Ohta, H. and Hata, S. (1971): "On the state surface of anisotropically consolidated clays," proc. of JSCE, No. 196. Dec. pp. 117~124.

Ohta, H., Yoshitan, S. and Hata, S. (1975): "Anisotropic stress-strain relationship of clay and its application to finite element analysis," soils and foundations, Vol. 15, No. 4, pp. 61-78.

Ohta, H. and Sekiguchi, H. (1979): "Constitutive equations considering anisotropy and stress reorientation in clay," proc. 3rd Int. Conf. Numerical methods in geomechanics, Aachen, pp. 475-484.

Roscoe, K.H. and Burland, J.B (1968): "On the generalized stress-strain behaviour of 'wet' clay," Engineering plasticity, Cambridge Univ. press. pp. 535~609.

Roscoe, K.H. Schofield, A.N. (1963): "Mechanical behaviour of an idealized 'wet' clay," proc. 2nd European Conf. Soil Mech., Wiebaden, Vol. 1, pp. 47-54.

Roscoe, K.H. Schofield, A.N. and Thrairajah, A. (1963): "Yielding of clays in states wetter than critical," geotechnique, Vol. 13. pp. 211~240.

Sandhu, R.S., and Wilson, E.L (1969): "Finite element analysis of seepage in elastic media, J. Eng Mech division. ASCE, Vol 95. No. EM3 pp. 641-652.

Sandhu, R S (1976) : "Variational principles for finite element Analysis of consolidation . ASCE , Numerical methods in geomechanics . Vol. 1 . pp. 20-40

Sandhu . R.S (1982) : " Finite element analysis of coupled deformation and fluid flow in Porous Media , Numerical methods in geomechanics ., Proceedings of NATO Advanced Study Inst . pp 203 - 2 7

Schofield , A.N . and Wroth , C P (1968): " Critical state soil mechanics ." Mc Graw-Hill Book Co. Ltd. London , England .

Sekiguchi , H . and Ohta , H (1977) :" Induced anisotropy and time dependency in clays," proc. speciality session 9, 9th ICSMFE , Tokyo . pp. 229 - 238 .

Siriwardane , H.J and Desai , C.S (1981) : "Two numerical schemes for nonlinear consolidation , Int . J . Numer . Anal . Methods Engrg . Vol . 17 , pp 405 - 426

Shibata , T and Sekiguchi . H . (1980) : " A method of pridicting failure of embankment foundation based on elasto - viscoplastic analysis ." 日本土木学会 論文報告集 Vol . 301 . pp. 93 - 104 .

Shibata , T . (1963) : "On the volume change of normally consolidated clay," disaster prevention reserch institute , Kyoto Univ., Annuals No. 6, pp. 128~134 .

Yamaguchi , H . and Y, Murakami (1978) : " Some analytical results of a plane strain consolidation problem of a clay layer with finite thickness , soils and foundations ." Vol 18 . No. 1 . pp 98 - 104 .

Yokoo, Y, K. Yamagata and H. Nagaoka (1971) : "Finite element method applied to Biot's consolidation theory, Soils and founds., Vol. 11. pp. 29-46

Yong, R.N. and Japp, R.D (1969): "Stress-strain behaviour of clays in dynamic comperrison," Vibrational effects on earthquakes on soils and foundations, ASTM, STP, 450, pp. 233-262.

Yoshikumi, H (1973) : "Multi-dimensional consolidation theory and its application to axial symmetric case. Ph thesis Hiroshima Univ.

Zienkiewicz, O, C and D.J. Noyler : "The adoption of critical state soil mechanics theory for use in finite elements, stress-strain behavior of soils, 1971.

柴田徹, 関口秀雄 (1980) : "盛土基礎地盤の彈粘塑性挙動解析と破壊予測, 土木学会論文集, 30号, PP 93-104.

鄭鎮燮 (1983) : "飽和粘土의 応力-變形率에 관한 研究."