β-분포를 갖는 센서의 방향각 오차로 인한 거리 오차의 통계적 분석

김종섭°, 이효근, 김영선
진해기계창

Statistical Analysis of Ranging Errors by using β-Density Angular Errors due to Heading Uncertainty

Jong Sung Kim, Hoy Keun Lee, Young Sun Kim
Chin Hae Machine Depot

Abstract

Traditional methods for estimating the location of underwater target, i.e. the triangulation method and the wavefront curvature method, have been utilized. The location of a target is defined by the range and the bearing, which estimates can be obtained by evaluating the time delay between neighboring sensors. Many components of error occur in estimating the target range, among which the error due to the fluctuation of heading angle is outstanding. In this paper, the wavefront curvature method was used. We considered the error due to the heading fluctuation as the β-density process, from which we analized the range estimates with β-density function exist in some finite limits, and its mean value and variation are depicted as a function of true range and heading fluctuation. Given heading angles amd sensor separation, maximum estimated heading errors are presented as a function of true range.

요 약

전통적인 수중표적의 위치를 찾아내는 방법으로, 삼각법(triangulation method) 과 wavefront curvature 방법이 있다. 표적의 위치는 거리(range) 와 방위(bearing) 을 구함으로써 알려지는데, 방위센서들간의 시간 지연양을 측정함으로 구하여지고, 이로부터 거리가 산출된다. 위와 같은 거리의 산출에는 오차가 따르는데, 오차의 요인으로는 여러가지가 있을 수 있겠으나, 대표적인 것으로 방향각 (heading angle) 요동(fluctuation)을 들 수 있다. 본 논문은 wavefront curvature 방법을 이용한 거리 산출에 있어서, 방향각의 요동에 의한 측정오차를 β-분포함수로 생각하고 그로부터 표적거리 산출오차에 관한 통계적인 특성들을 분석 하였다.

β-분포함수를 만족하는 산출된 거리는 일정한 한계 영역안에 존재하고, 평균값과 표준편차를 구하여 참거리(true range) 및 방향각 편차의 함수로 나타내었으며, 방향각의 최대 오차크기를 주어진 방향각및 센서 간격하에서 원래 거리의 함수로 나타내어, 어떤 거리에서의 산출각 오차를 비교하여 보았다.

1. 서 론

수중 표적탐지는 두 센서간의 지연시간(time de-lay) 을 측정하여, 표적의 위치는 수신 센서로 부터의 거리(range) 와 방위(bearing) 로 표시되는데, 그것을 산출하는데에 널리 쓰이는 방법으로 triangulation 방법[1),2),4)]과 wavefront curvature 방법[3)5)]이 있다. Wavefront curvature 방법에 의한 수동 표적거리 산출에는 세개의 수중센서가 필요하다. 이 세개의 센서들은 각각 몇개의 센서들로 이루어져서 한 그룹을 형성하도록 만드는 것이 오차를 줄이는 방법으로 알려져왔다. 거리를 산출하는데에는 여러가지 요인으로 오차가 발생하는데, 그 중 몇가지대표적인 예를 들면, 수신 수중센서 위치의 불확실성에 의한 오차가 많은

논문들에서 거론 되어 왔다.[6),7)]

특히 센서의 방향각(heading angle)요동에 의한 오차의 유발은 중요하게 다루어져 왔고, 이러한 오차를 분석하는데에는 요동에 의한 오차의 분포가 Gaussian 분포라는 가정하에서 거론 되어져 왔으며, 그로부터 측정거리 오차에 관한 통계적인 분석의 연구가 진행되어 왔다.[3),5),6)] 그러나 실제의 물리적인 측면에서, 어떠한 확률변수라도 같을 확률이 있는Gaussian 분포를 따르는 방향각의 오차보다는 어떤 범위안에서 규정되어 지는 β-분포함수를 고려하는것이 더 의미가 있다고 하겠다. 따라서, 본 논문은 3개의, 그룹으로 형성된 센서를 갖는 수동형 표적탐지 체계에 있어서, 측정된 방향각의 오차가 β-분포함수를 만족할때 산출된 표적거리를 방향각의 함수로 나타내어, 그 오차의 한계를 분명히하고, 그것을 통계적인 방법으로 분석하고자 한다.

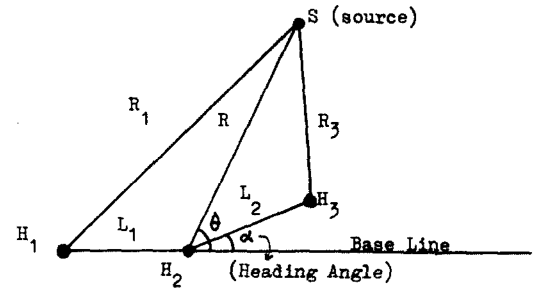
2. 거리의 산출 (Range Estimation)

수중의, 어떤 표적의 위치를 구하기 위하여, (Fig.1) 과, 같은 세개의 센서 그룹을 생각하자. (Fig.1) 에 표시되어 있는 바와 같이 센서H_1 로 부터 음원까지의 거리를 실제거리 R, base line 에서 부터의 각을 θ 로 하고, 각 센서간의 간격을L_1,L_2 로 한다. 음원으로 부터 수신센서 까지 음이 전달되는 속도가 일정하도록 매질이 균질하다고 가정하고, H_1과H_2, H_2 와 H_3사이의 시간 지연양을 각각 t_{21}, t_{32} 라 둔다. 이제, (Fig.1)과 같이 수신센서 H_3 가 base line 에 대한 방향각 α 를 이루고 있다고 할때, 실제거리R 를 R_1 과 R_3 의 R 에 대한 시간지연양t_{21} , t_{32} , 각 θ 및 α 의 함수로 표시 할 수 있다.

수신센서간의 시간지연양 t_{21} ,t_{32} 는 각각,

$$t_{21}=\frac{R_1-R}{C}=C^{-1}\left[R\left(1+\frac{L_1^2}{R^2}+\frac{2L_1}{R}\cos\theta\right)^{1/2}-R\right] \qquad (1)$$

$$t_{32}=\frac{R_1-R}{C}=C^{-1}\left[R-R\left(1+\frac{L_1^2}{R^2}+\frac{2L_1}{R}\cos\theta\right)^{1/2}\right] \qquad (2)$$



(Fig.1) Geometry of receiving hydrophones, and sound source.

H_1, H_2, H_3 ; Hydrophones θ ; Bearing

α ; Reading Angle R ; Range

로 주어지고, 수신센서들로 부터 충분히 먼거리에 음원이 있다고 가정할때, 즉 $R \gg L_1, L_2$ 인 far-field 조건이 만족될때 식(1)과 식(2)를 전개하여 R^{-2} 까지 취하고, R 에 관한 식을 구하면, 거리계산에 관한 식,

$$R=\frac{L_1^2\sin^2\theta+L_2^2\sin^2(\theta-\alpha)}{2C(t_{21}-t_{32})-2L_1\cos\theta+2L_2\cos(\theta-\alpha)} \qquad (3)$$

을 얻을수 있다.위의(3)식이 구하고자 했던 거리산출식인데, 만일 방향각이 θ 이고 센서간격이 $L_1=L_2=L$ 로 같다면 (5)식은 더욱 간단한 식,

$$R=\frac{L^2\sin^2\theta}{C(t_{21}-t_{32})} \qquad (4)$$

이 된다.

수중표적의 위치를 구하는데 (3)식을 사용 할 경우 측정 오차가 유발될 수 있는데, 그 오차의 요인들로는 매질의 비균질성에 의한 일정치 못한 음속, 시간지연 t_{12},t_{32} 측정 오차로 인한 거리 측정오차, 또한 방위 측정오차들이 있다. 그러나 이러한 연관성을 가지고 있는 오차보다는, 센서들의 요동에의한 위치의 불확실성에 의한 것이 매우 중요한 오차의 원인이 된다. 물론 위치의 불확실성 자체가 시간지연 방위 측정의 오차를 가져 올 수 있다. 실제의 가장 큰 오차는 센서들의 non-collinearity 때문에 생긴다. 그러한 non-collinearity 로서, base line으로부터 방향각α 를 가지고 있는 센서을 생각하여 주었고, 이때 방향각 이 요동에 의한 오차가 결국 거리

산출 오차를 대표한다고 생각하여 본 논문을 전개하고자 한다. 일반적으로 요동오차를 다룰때 그것의 분포가 어떤 범위로 제한되는 β-분포함수로써 주어지는 오차를 생각하기로 한다. 식(3)에서, 오차를 유발시키는 방향각 uncertainty 오차 n 을(3)에 첨가하면,

$$R = \frac{L_1 \sin^2\theta + L_2 \sin^2(\theta-\alpha-n)}{2C(t_{21}-t_{32}) - 2L_1\cos\theta + 2L_2\cos(\theta-\alpha-n)} \tag{5}$$

이 되고, 위식을 작은 방향각 uncertainty 를 가정하여 O(n)까지 전개하여 정리하면, 간단히

$$R_n = \frac{E}{A + B\,n} + F \tag{6}$$

로 쓸 수 있는데, E ,F 는 각각

$$E = C - \frac{DA}{B} = C\left(1 + \frac{L_2\cos(\theta-\alpha)}{R}\right) = C\left(1 - \frac{F}{R}\right) \tag{7}$$

$$F = \frac{D}{B} = -L_2\cos(\theta-\alpha) \tag{8}$$

이고,

$$A = 2C(t_{21}-t_{32}) - 2L_1\cos\theta + 2L_2\cos(\theta-\alpha) \tag{9}$$

$$B = 2L_2\sin(\theta-\alpha) \tag{10}$$

$$C = L_1^2\sin^2\theta + L_2^2\sin^2(\theta-\alpha) \tag{11}$$

$$D = -2L_2^2\cos(\theta-\alpha)\sin(\theta-\alpha) \tag{12}$$

이다. 이제, 식(6) 으로 부터 산출거리에 관한 통계를 구할 수 있는데, 먼저 β-분포함수를 만족하는 방향각 uncertainty 오차의 통계를 구하고, 그로부터 산출거리 오차에 관한 통계를 논하기로 한다.

3. 방향각 오차에 관한 β-분포함수

일반적인 β-분포함수의 형태는,

$$f_x(x) = B(a,b)^{-1} x^{a-1} (1-x)^{b-1} \tag{13}$$

으로 주어지며, 위식에서,

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \tag{14}$$

이고, a,b 는 shaping parameter 이다.

β-분포함수(13)은 $0 \le x \le 1$ 인 영역에서, 을 만족하고, β-분포함수는 변수범위가 0부터 1로 제한되는데, 변수범위를 실제의 방향각 uncertainty 오차 n을 변수로 할때와 일치 시켜주기 위하여, 방향각 uncertainty n 을 변수 x 로 표시하여,

$$n = Gx + H \tag{16}$$

로 두고, 그 분포가 0 를 중심으로 하기 위해서,

$$H = -\frac{G}{2} \tag{17}$$

로 두면, $0 \le x \le 1$ 일때

$$-G/2 \le n \le G/2 \tag{18}$$

가 되어, 목적에 타당하다. 즉, 방향각 uncertainty 는 그 절대 값의 크기가 $\frac{G}{2}$를 넘어갈수 없음을 나타내고, 그것은 어떠한 값도 가질수 있는 Gaussian 분포와의 차이를 보여준다.

변수 x 는 β-분포함수를 만족하므로 식(16)을 이용하여 방향각 uncertainty 의 오차 n 에 관한 분포함수를 구해낼 수 있다.

Continuous random variable 에 관한 monotonic transformation[8] 은

$$f_y(y) = f_x(x)\left|\frac{dx}{dy}\right| \tag{19}$$

로 주어지므로, n 에 관한 분포함수는 식(16)을 이용하여

$$\begin{aligned} f(n) &= f_x(x)\left|\frac{dx}{dy}\right| \\ &= f_x\left(\frac{n-H}{G}\right)\cdot\frac{1}{G} \\ &= \frac{1}{B(a,b)}\cdot\frac{1}{G^{a+b-1}}(n-H)^{a-1}(G+H-n)^{b-1} \end{aligned} \tag{20}$$

가 된다. 이제 H = -G/2 를 대입하고, a=b 인 대칭형 β-분포함수에 대하여 n 의 범위를 고려한다면,

$$f(n) = \frac{1}{B(a,a)G^{2a-1}}\left[\left(\frac{G}{2}\right)^2 - n^2\right]^{a-1}\left\{U\left(n+\frac{G}{2}\right) - U(n-G/2)\right\} \tag{21}$$

로 쓸 수 있다. 위 식에서

$$U(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \tag{22}$$

인 step function 이다.

식(21)은 방향각 uncertainty 오차의 분포함수인데 이 분포함수를 이용하여, 그 variance 를 구하면[10]

$$\sigma_n^2 = \frac{G^2}{4(2a+1)} \tag{23}$$

혹은, $\sigma_n = \frac{G}{1(2a+1)^{1/2}}$ 이 된다.

위 식에서 방향과 uncertaibty 오차의 varoamce 는 shaping parameter 와 uncertainty 의 최대오차 G/2 의 함수로 나타나는데, 최대오차 한계 G/2 의 값을 구하면, (23)식은 이해될 수 있다. G/2 의 의미는 거리에 관한 통계를 계속할때 확실시 된다.

지금까지, 방향과 uncertainty 에 의한 오차 variance 를 β -분포함수를 도입하여 구해냈는데, 식 (6)을 이용하면, 거리산출 오차에 관한 통계적 분석을 계속 진행시킬 수 있다.

4. 산출 거리의 통계

(6)식 에서,

$$y = Bn + A \tag{24}$$

로 두고, 분포함수의 transformation rule (19)식을 이용하면,

$$f_y(y) = f_n(n)\frac{dn}{dy} = f_n\left(\frac{y-A}{B}\right)\cdot B^{-1}$$
$$= \frac{\{(G/2)^2 - ((y-A)/B)^2\}^{a-1}}{B(a,a)G^{2a-1}\cdot B}\left\{U(y-A+BG/2) - U(y-A-BG/2)\right\} \tag{25}$$

가 되고, $R_n = E/y+F$ 이므로,

다시 식(19)을 이용하면, 산출거리의 분포함수 $f_{R_n}(R_n)$ 을 구할 수 있다.

즉,

$$f_{R_n}(R_n) = f_y(y)\frac{dy}{dR} = f_y\left(\frac{E}{R-F}\right)\cdot\left|-\frac{E}{(R-F)^2}\right|$$
$$= \frac{E}{(R-F)^2}\frac{1}{B(a,a)G^{2a-1}B}\left\{\left(\frac{G}{2}\right)^2 - \left(\frac{\frac{E}{R-F}-A}{B}\right)^2\right\}^{a-1}$$
$$\times\left\{U\left(\frac{E}{R-F} - A + \frac{BG}{2}\right) - U\left(\frac{E}{R_n-F} - A - \frac{BG}{2}\right)\right\} \tag{26}$$

위 식을 간단히 하기 위하여,

$$A/B = I = \frac{2C(t_{21}-t_{32}) + 2L_1\cos(\theta-\alpha) - 2L_1\cos\theta}{2L_2\sin(\theta-\alpha)}$$
$$= R^{-1}CB^{-1} \tag{27}$$

$$E/A = J = \frac{C(1+L_2\cos(\theta-\alpha)R^{-1})}{2C(t_{21}-t_{32}) - 2L_1\cos(\theta-\alpha) + 2L_2\cos(\theta-\alpha)}$$

$$= R + L_2\cos(\theta-\alpha) = R - F \tag{28}$$

으로 두고, (26)식을 간단히 하면,

$$f_{R_n}(R_n) = \frac{IJ}{G^2a-1B(a,a)}\cdot\frac{1}{(R_n-F)^2}\left\{\left(\frac{G}{2}\right)^2 - \left(\frac{IJ}{R-F} - I\right)^2\right\}^{a-1}$$
$$\times\left\{U\left(\frac{IJ}{R_n-F} - I + \frac{G}{2}\right) - U\left(\frac{IJ}{R_n-F} - I - \frac{G}{2}\right)\right\} \tag{29}$$

가 된다. 위 식(29)에서 step function U 는,

$$U\left(\frac{IJ}{R_n-F} - I + \frac{G}{2}\right) - U\left(\frac{IJ}{R_n-F} - I - \frac{G}{2}\right)$$

$$= U\left(R_n - F - \frac{IJ}{I+G/2}\right) - U\left(R_n - F - \frac{IJ}{I-G/2}\right) \tag{30}$$

가 되어 산출거리 R_n 의 범위가

$$\frac{IJ}{I+G/2} + F \leq R_n \leq \frac{IJ}{I-G/2} + F \tag{31}$$

를 만족하므로, 산출거리 R_n 에 관한 분포함수는 결국

$$f_{R_n}(R_n) = \frac{IJ}{G2a-1B(a,a)}\left\{I^2 - \left(\frac{G}{2}\right)^2\right\}^{a-1}\left(R_n - F - \frac{IJ}{I+G/2}\right)^{a-1}$$
$$\times\left(\frac{IJ}{I-G/2} - R_n - F\right)^{a-1}(R_n-F)^{-2a} \tag{32}$$

이 된다. 이제 식(32)를 이용하면, 평균산출거리 R_n 및 variance $\sigma^2_{R_n}$ 는 각각 식,

$$\langle R_n\rangle = \int_{R_{n\,low}}^{R_{n\,up}} R_n f_{R_n}(R_n)\,dR_n \tag{33}$$

과

$$\sigma^2_{R_n} = \langle R_n^2\rangle - \langle R_n\rangle^2 \tag{34}$$

$$R_n^2 = \int_{R_{n\,low}}^{R_{n\,up}} R_n^2 f_{R_n}(R_n)\,dR_n \tag{35}$$

을 이용하여서 구할 수 있겠는데, 위의 계산은 Mellin transform 을 이용하여, 그 moment 를 구함으로써 보다 쉽게 행하여 질 수 있다. 식(32)로 주어지는 거리 분포함수의 Mellin transform 은 Appendix. 에 유도되어 있다.

산출거리 분포함수의 Meillin transform 은 Appendix.의 (0)식으로 주어지므로, 그것의 moment 들로부터 r 에 관한 statistics 를 얻고, $r = R_n - F$ 이므로 R_n 에 대한 statistics 로 바로 바뀌진다.

먼저, Mellin transform 에 대한 moment 를 차례로 구하면 다음과 같다.

$$m_0 = T(1) = \int_0^\infty f_r(r)\,dr = {}_2F_1\left(0, a; 2a; \frac{G}{I+G/2}\right) = 1 \tag{36}$$

$$m_1 = T(2) = \int_0^\infty f_r(r)\,r\,dr = \langle r \rangle = \left(\frac{IJ}{I+G/2}\right) {}_2F_1\left(1,a;2a;\frac{G}{I+G/2}\right) \quad (37)$$

$$m = T(3) = \int_0^\infty f_r(r)\,r^2\,dr = \langle r^2 \rangle = \left(\frac{IJ}{I+G/2}\right)^2 {}_2F_1\left(2,a;2a;\frac{G}{I+G/2}\right) \quad (38)$$

이제, 식(36), (37), 및 (38)를 이용하여 R_n 에 관한statistics 를 얻을 수 있다.

$R_n = r + F$ 이므로, 평균산출거리는

$$\langle R_n \rangle = \langle r \rangle + F = \left(\frac{IJ}{I+G/2}\right) {}_2F_1\left(1,a;2a;\frac{G}{I+G/2}\right) + F \quad (39)$$

이 되고, variance 는

$$\sigma_r^2 = \langle R_n^2 \rangle - \langle R_n \rangle^2 = \langle (r+F)^2 \rangle - (\langle r \rangle + F)^2$$
$$= \langle r^2 \rangle - \langle r \rangle^2 = \sigma_r^2 = \left(\frac{IJ}{I+G/2}\right)^2 \left({}_2F_1\left(2,a;2a;\frac{G}{I+G/2}\right) - \left({}_2F_1\left(1,a;2a;\frac{G}{I+G/2}\right)\right)^2 \right) \quad (40)$$

이 된다. 위식에서 ${}_2F_1$ 은 Appendix. 에 정의되어 있는 Hypergeometric f.t. 이다. 위의 식(39), (40)은 방향각 uncertainty 의 오차가 β -분포함수를 갖는 센서를 이용한 산출거리의 평균값 및 그 variance 를 나타내는데, 만일 방향각uncertainty 가 0라면, 즉, $G \to 0$ 이면, 산출거리의 평균값은,

$$\langle R_n \rangle_{G\to 0} = J\ {}_2F_1(1,a;2a;0) + F = J + F = R \quad (41)$$

이 되어 실제의 거리와 같아지고, variance 는

$$(\sigma_{R_n}^2)_{G\to 0} = J\left\{ {}_2F_1(2,a;2a;0) - ({}_2F_1(1,a;2a;0))^2 \right\} = 0 \quad (42)$$

가 되어 없어 진다.

5. 방향각 오차의 한계와 측정된 거리의 한계

Appendix. 의 식(11)으로 주어지는 Hypergeimetric Function 은 $2a > (s-1) + a$ (43)

일 경우엔,

$$\left| \frac{G}{I+G/2} \right| < 1 \quad (44)$$

을 만족하는 조건하에서 수렴한다. 물리적으로, 발산하는 경우는 의미가 없으므로, 수렴조건 (44) 을 만족하는 shaping parameter 는, Mellin tranaform 에서 s=3 까지 이용되었으므로, $a > 2$ 이다.

식(40)에서 부터 최대의 방향각 uncertainty 에 의한 최대오차 G/2 는,

$$|G/2| \leq I \quad (45)$$

의 범위안에 있게된다. 만일 방향각 최대오차가 양의 한계

$$0 \leq G/2 \leq I, \quad n = G/2 \quad (46)$$

이면, 식 (6) 으로 부터, 산출거리는

$$R_n = \frac{E}{A+Bn} + F = \frac{E/A \cdot A/B}{A/B+n} + F = \frac{IJ}{I+G/2} + F \quad (47)$$

가 되므로, 구하는 산출거리R_n 의 범위는, 방향각 최대오차 G/2 가 최대값 I 를 갖을때에, 식(28)를 이용하면,

$$\frac{1}{2}(R - L_2\cos(\theta-\alpha)) \leq R_n \leq R \quad (48)$$

이 된다. 마찬가지 방법으로 음의 한계에 대해서,

$$R \leq R_n \leq \infty \quad (49)$$

가 된다.

식(46)로 부터 최대방향각 오차$n = G/2$ 의 max. 값은 I 로 주어지고(27)식에서 부터 방향각 $\alpha = 0$, 방위 $\theta = \pi/2$, $L_1 = L_2 = L$이면

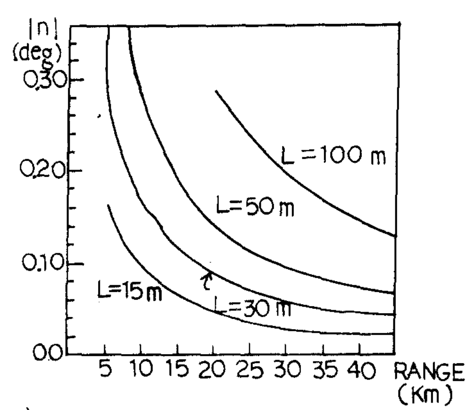
$$I = \frac{1}{R} \cdot \frac{C}{B}\Big\}_{\alpha=0,\ \theta=\pi/2} = \frac{L}{R} \quad (50)$$

이되어, 방향각의 uncertainty 는

$$|n| \leq \tan^{-1}(L/R) \quad (51)$$

안에서 존재한다.

(Fig.2) 는 $|n| = \tan(L/R)$ 의 여러가지의 L,R 에 대한graph 이다.



(Fig.2) Maximum heading angular error versus range

우리가 구하고자 하는 것은 최대 오차를 갖을때 mean range 와 variance 를 명시하는 것이다.

(39)식으로 부터, 최대오차에 대한 평균산출거리는

$$\langle R_n\rangle_{max.error} = \frac{J}{2}\ {}_2F_1(1,a;2a;1)+F$$

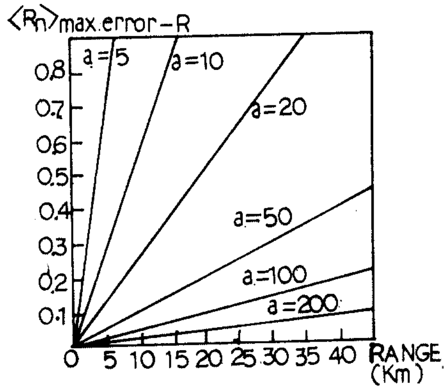
$$= \frac{1}{2}(R+L_2\cos(\theta-\alpha))\frac{\Gamma(2a)\ \Gamma(a-1)}{\Gamma(2a-1)\ \Gamma(a)} - L\cos(\theta-\alpha) \qquad (52)$$

이 되고, 최대 variance 는, 식(40)으로 부터

$$(\sigma_{R_n})_{Max.error} = \frac{(R+L_2\cos(\theta-\alpha))^2}{4}\left(\frac{\Gamma(2a)\Gamma(a-1)}{\Gamma(2a-2)\Gamma(a)} - \left(\frac{\Gamma(2a)\ \Gamma(a-1)}{\Gamma(2a-1)\Gamma(a)}\right)^2\right) \qquad (53)$$

을 얻는다. 간단히 하기 위하여,

$\alpha=0$, $L_1=L_2=0$ 인경우에 R_n max.error$-R$ 의 R 에 대한 그래프가 여러가지 shaping parmeter 값 a 에 대하여 (fig. 3) 에 나타나 있다.



(Fig.3) Maximum mean range versus true range

식 (51) 에서 maximum heading uncertainty 오차를 구하였고 이제, 최대 방향각 오차에 대한 variance 를 구하면, (23)식에서 부터

$$(\sigma_n)_{max.} = \frac{I}{(2a+1)^{1/2}} = \frac{L_1^2\sin^2\theta+L_2^2\sin^2(\theta-\alpha)}{2L_2\sin(\theta-\alpha)}R^{-1}\cdot(2a+1)^{-1/2} \qquad (54)$$

이 된다. $L=L=L$, $\theta=\pi/2$, $\alpha=0$ 인 경우를 생각하면,

$$(\sigma_n)_{max.} = \frac{L}{R(2a+1)^{1/2}} \qquad (55)$$

을 얻는다. (Fig.4) 는 식(55) 을 graph 로 나타낸 것이다.

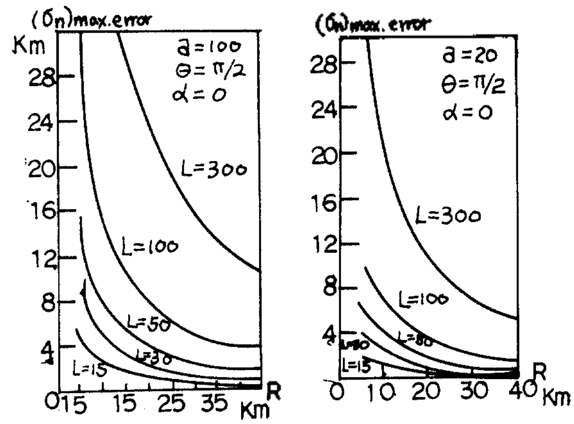
6. 평균 산출거리와 산출거리의 variance 에 관한 일반적인 식의 전개

식 (52) 와 식(53)은 β-분포함수로 표현되는 방향각 오차에 대한 평균산출거리 및 variance 인데 그것은 일반적으로 R 에 관한 급수로 전개 되어 질수 있다. 즉

$$R_n = R+O(R^2)+O(R^3) + \cdots\cdots$$

$$\sigma_{R_n} = \sigma_n(O(R)+O(R^2)+O(R^3)) + \cdots\cdots \qquad (56)$$

와 같은 급수의 형태로 전개 될 수 있는데, 그 계수들은 식(41) 의 조건하에서 수렴하게 되고, 위의(56) 식을 정확히 구하는 작업은 지루하고, 하찮은 일이다.



(Fig.4) Maximum variance versus true range for maximum heading angular uncertainty.

7. 결 론

수중에서 표적의 탐지는 그 거리와 방위를 구하므로서 가능하게 되는데, 세개의 센서를 이용한 wavefront curvaturg 방법의 거리산출에는 여러가지 요인으로 오차가 따르게 된다. 본 논문에서는 그 오차의 원인으로 방향각의 uncertainty 를 생각하였고, 방향각 uncertainty 에 의한 오차의 분포를 -분포함수로 가정하여, 그로부터 산출거리에 대한 분포함수를 구하고 평균값및 variance 를 구하였다.

β-분포함수로 가정한 방향각 uncertainty 의 경우, 그 variance 는 식(23)로 주어져, 최대 방향각 오차 G/2 와 shaping parameter a 에 의존하고, 최대방향각 오차 G/2 는 (45)식의 범위안에서 존재하여, 그 최대값은 $L=L=L$, $\theta=\pi/2$, $\alpha=0$ 인 경우 tan (L/R)로 주어져 (fig.2) 에 그 의존도를 보였다. 산출거리 R_n 의 평균값과 variance 가 β-분포함수를 갖는 방향각 오차로 부터 얻어진 산출거리

분포함수에 대한 Mellin transformation 을 사용하여, 그 moment 를 구함으로써 (39)식과 (40)식으로 나타났다. 산출거리의 평균값과 variance 는 최대방향각 오차에서 (52)식과 (53)식으로 표현되고, $\theta=\pi/2$, $\alpha=0$, $L_1=L_2=L$인 경우, R_n 과 σR_n 은 각각 거리 R 과, shaping parameter a 의 함수로 나타났으며 $\langle R_n\rangle \propto R$, $\sigma^2_{R_n} \propto R^2$ 의 예상되어졌던 결과로써, 여러가지 a 값에 대하여 (fig.3) 에 그 의존도가 나타나 있다. 또한, 최대 방향각 오차 G/2=I 에 대한 최대 방향각 uncertainty 의 variance 는, 위와 마찬가지의 경우에 대해, $\sigma_{R_n} \propto L$, R^{-1} 의 의존도를 보여주었다. ((fig.4) 참조) 이로써, 세개의 센서를 이용한 거리 산출의 경우, 방향각 uncertainty 에 의한 오차의 한계로 부터 산출거리및 평균산출거리, variance 의 한계를 구하였고 이상의 결과는 수중표적의 위치를 알아내는 processing 에 이용될 수 있으리라 생각하며, 실제의 경우에는 방향각 uncertainty 에 의한 오차원인 이외의 복합된 요인들이 고려되어야 한다고 생각한다.

REFERENCES

1. J.W.R.Griffths, P.L.Stocklin, C.Van Schooneveld, Signal Processing(Academic, London & New York, 1973)
2. G.Clifford Carter, " Passive Ranging Errors due receiving Hydrophone Position Uncertainty, " J.Acoust.soc.Am. 65(2),528-531 (1979)
3. J.C.Hassab, "The Effect of Uncertainty in the Heading or Placement of Sub-array in Passive Ranging Accuracy,"J.Acoust.Soc.Am.75(2) 479-485(1984)
4. E.J.Hilliard, Jr.and R.F.Pinkos,"An Analysis of Triangulation Ranging using Beta Dencenty Angular Errors",J.Acoust.Am.65(5), 1218-1228(1984)
5. Joseph C.Hassab,"Contact Location and Motion Analysis in the Ocean Envirenment: A Perspeptive, IEEE J.Ocean. Engeneering, vol.OE-8, No.3, July 136-147 (1983)
6. P.M.Schultheiss, " Optimum ange and Bearing Estination with Randomly Pert turbed Arrarys" J.Acoust. Soc.Am. 68(1), 167-173 (1980)
7. P.M.Schultheiss and E.Ashek, "Optimum and Sub-optimum source Localization with Sensors subject to Random Motion", J.Acoust Soc. Am. 74(1), 131-142(1983)
8. A.Papoulis, Probability, Random Variables and Stochastic Processes (Mcgraw-Hill, New York, 1965)
9. Yu. V. Geronimus/M. Yu. Tesytlin, Table of integrals, Series, and Products (Academic, London & New York, 1965)
10. M. Arromowitz, and I.A.Stegun Handbook of Mathematical Fanctions. 2nd printing(U.S. Government Printing Offece, Washington, D.C. 1964)

(Appendix.) Mellin Tramsform of Range Estimates.

$$f_{R_n}(R_n)=\frac{IJ}{G^{2a-1}B(a,a)}\left\{I^2-\left(\frac{G}{2}\right)^2\right\}^{a-1}\left(R_n-F-\frac{IJ}{I+G/2}\right)^{a-1}$$

$$\times\left(\frac{IJ}{I-G/2}-R_n-F\right)^{a-1}(R_n-F)^{-2a}$$

간단히 하기위해,

$$\eta=\frac{IJ}{I+G/2},\ \xi=\frac{IJ}{I-G/2},\ \zeta=\frac{IJ}{G^{2a-1}B(a,a)}\left\{I^2-(G/2)^2\right\}^{a-1} \quad (a)$$

으로 두면, 산출거리의 분포함수는,

$$f_{R_n}(R_n)=\frac{(R_n-F-\eta)^{a-1}(\xi-R_n+F)^{a-1}}{(R_n-F)^{2a}}\zeta$$

이 되고, R_n 의 범위는 $\eta+F\leq R_n\leq\xi+F$

이제 변수를 $r=R_n-F$ 로 두면,

이 되고, r 은 $\eta\leq r\leq\xi$ 을 만족한다. Mellin transform 의 일반적인 형태는, $T(s)=\int_0^\infty f_r(r)r^{s-1}dr$ (f) 로 주어지므로, 식 (e) 를 (f) 에 대입하면,

$$T(s)=\zeta\int_\eta^\xi (r-\eta)^{a-1}(\xi-r)^{a-1}r^{s-1-2a}dr \quad (g)$$

가 된다. $r=1/v$ 로 변환을 하면

$$T(s)=\zeta(\eta\xi)^{a-1}\int_{1/\xi}^{1/\eta}\frac{(1/\eta-v)^{a-1}(v-1/\xi)^{a-1}}{v^{a-1}}dv \quad (h)$$

이 되고, 다시 변수 V를

$$V=2^{-1}Xv+2^{-1}Y,\ X=\frac{1}{\eta}-\frac{1}{\xi},\ Y=\frac{1}{\eta}+\frac{1}{\xi} \quad (i)$$

로 치환하면, 다시

$$T(s)=\zeta(\eta\xi)^{a-1}\left(\frac{X}{2}\right)^{2a-s}\int_{-1}^{1}\frac{(1-v^2)^{a-1}}{(v+(Y/X))^{s-1}}dV \quad (j)$$

을 얻고, 끝으로 $w=v+1$ 로 두면,

$$T(s)=\zeta(\eta\xi)^{a-1}\left(\frac{X}{2}\right)^{2a-s}\int_0^2 w^{a-1}(2-w)^{a-1}\left(w+\left(\frac{Y}{X}-1\right)\right)^{-(s-1)} \quad (k)$$

를 얻는다. 위 식(k) 의 적분식

$$\int_0^u x^{\nu-1}(u-x)^{\mu-1}(x^m+\beta^m)^\lambda dx=\beta^{m\lambda}u^{\mu+\nu+1}B(\mu,\nu)\,{}_{m+1}F_m$$

$$\cdot\left(-\lambda,\frac{\nu}{m},\frac{\nu+1}{m},\ldots,\frac{\nu+m+1}{m};\frac{\mu+\nu}{m},\frac{\mu+\nu+1}{m},\ldots\frac{\mu+\nu+m-1}{m};\frac{-u^m}{m}\right) \quad (l)$$

을 이용하면 계산될 수 있다. 따라서 구하는 Mellin transform 은

$$T(s)=\zeta(\eta\xi)^{a-1}(x/2)^{2a-s}(Y/X-1)^{-(s-1)}2^{2a+1}B(a,a)$$

$$\times\ {}_2F_1\left(s-1,a;2a;\frac{-2}{Y/X-1}\right) \quad (m)$$

이 되는데, 위에서 ${}_2F_1$ 은 Hypergeometric function 으로 아래와 같이 정의된다.

$${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;z)=F(\alpha,\beta;\gamma;z)=1+\frac{\alpha\beta}{\gamma\,1}z+\frac{\alpha(\alpha+1)2\cdot\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)\ 1.2}z^2+\ldots$$

$$=\sum_{n=0}^\infty\frac{(\alpha)_n(\beta)_n z^n}{(\gamma)_n n!}=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\sum_{n=0}^\infty\frac{(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)z^n}{\Gamma(\gamma+n)n!\ n!} \quad (n)$$

식 의 계수를 간단히 정리하면, 구하고자 했던 산출거리 분포함수에 관한 Mellin transform 을 얻는다.

$$T(s)=\left(\frac{IJ}{I+G/2}\right)^{s-1}{}_2F_1\left(s-1,a;2a;\frac{G}{I+G/2}\right) \quad (o)$$