대한전기학회 1984년도 하계학술회의 논문집 1984년 7월 20일

쐐기형 유전체의 물리광학 근사해를 교정하는 두 수정 방법의 비교

Comparison of two correction schemes to the physical optics solution in case of dielectric wedge

김 세 운*
나 정 웅
신 상 영

한 국 과 학 기 술 원
전기및 전자공학과

Abstract

The electromagnetic wave scattered by an arbitrary-angled dielectric wedge is constructed by physical optics solution and its corrected field. Two models of correction source are obtained ; one is multipole line source at tip of wedge and the other is correction electric and magnetic currents distributed along the interfaces of dielectric wedge. Calculated far-field patterns are presented and compared each other.

1. 서 론

쐐기형 유전체에 의한 전자파의 산란문제는 간단한 구조임에도 불구하고 경계조건과 모서리 조건에 의해 복잡한 수학문제로 아직 해석적으로 정확한 해를 얻지 못하고 있다[1]

직각 쐐기형 유전체에서 산란파를 먼저 물리광학 근사법으로 근사해를 구하고 이를 모서리 끝에 다극선 전원으로 교정하여 모서리에서 멀리 떨어진 곳에서 유용한 해를 계산하였다[2]. 다극선 전원을 수정원으로 임의의 쐐기각의 경우로 확장하여 얻은 결과[3] 를, 모서리 끝에서 정전기적 극한에서의 모서리 조건을[4] 만족하도록 Neumann 전개된 수정자기전류와 전기전류의 급수를 모서리에서 멀리 떨어진 곳에서 급속히 수렴하도록 변환시켜 얻은 결과와 비교 검토하였다.

2. 적분 방정식

그림 1과 같이 임의의 쐐기각 θ_d를 갖는 쐐기형 유전체에 모서리와 나란한 방향으로 분극된 평면파 u_i가 입사시, 산란된 전체 전계 u를 유전체 내부에서 프리에 변환(F)한 파수영역의 함수 A는 다음과 같은 쌍적분 방정식을 만족한다.

$$F^{-1}[A(\alpha,\beta)] = 0 \qquad S_d, \quad (1.a)$$

$$F^{-1}[K(\alpha,\beta)A(\alpha,\beta)] = u_i(\rho,\theta), \qquad S_v. \quad (1.b)$$

여기서 F^{-1}은 역 Fourier 변환으로 A와 K는

$$A(\alpha,\beta) = F[H(x\sin\theta_d - y\cos\theta_d)H(y)u(\rho,\theta)], \quad (2.a)$$

$$K(\alpha,\beta) = \frac{\alpha^2+\beta^2-k_d^2}{\alpha^2+\beta^2-k_v^2} \quad (2.b)$$

으로 정의되며, A로 부터 전체전계 u를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$u(\rho,\theta) = \begin{cases} F^{-1}[A(\alpha,\beta)], & S_d, \quad (3.a) \\ u_i(\rho,\theta) - F^{-1}[K(\alpha,\beta)A(\alpha,\beta)], & S_v. \quad (3.b) \end{cases}$$

식(2.a)의 양변에 $F(\nabla^2+k_d^2)F^{-1}$ 의 연산을 취하면 파수 영역의 함수 A에 대하여 다음과 같은 선적분을 얻을 수 있다.

$$A(\alpha,\beta) = \frac{1}{\alpha^2+\beta^2-k_d^2}\Big[\int_0^\infty d\rho\, e^{-i\alpha\rho}\{i\beta\, u(\rho,0) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta}u(\rho,0)\} + \int_0^\infty d\rho\, e^{-i(\alpha\cos\theta_d+\beta\cos\theta_d)}\{i(\alpha\sin\theta_d - \beta\cos\theta_d)u(\rho,\theta_d) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta}u(\rho,\theta_d)\}\Big] \quad (4)$$

3. 물리광학 근사

식(1)의 쌍적분 방정식을 해석적으로 푸는 방법이 아직 알려져 있지 않으므로, A의 근사해를 식(4)에서 경계면 위의 전자파를 기하 광학파로 근사하여 먼저 계산하고 이를 식(1)를 써서 수정하자.

그림 2에서와 같은 ray-tracing 방법으로 C_2경계면에 입사한 경우의 기하 광학파 u_g를 계산하면 다음과 같이 일반적으로 쓸 수 있다.

$$
\begin{aligned}
u_g(\rho,\theta) &= D(\theta_d,\theta_i)e^{ik_v\rho\cos(\theta-\theta_i)} \\
&+ D(\theta_d,\theta^r)R^o e^{ik_v\rho\cos(\theta-\theta^r)} \\
&+ \sum_{m=1}^{M_e} D(\theta_d,\theta^{2m.t})K^{2m.t}e^{ik_v\rho\cos(\theta-\theta^{2m.t})} \\
&+ \sum_{m=1}^{M_o} D(\theta^{2m-1.t},2\pi)K^{2m-1.t} \\
&\times e^{ik_v\rho\cos(\theta-\theta^{2m-1.t})} \\
&+ \sum_{m=1}^{M} D(0,\theta_d)K^m\, e^{ik_d\rho\cos(\theta-\theta^m)} \\
&+\begin{bmatrix} D(0,\theta^{m+1}); & M_e\neq M_o \\ D(\theta^{m+1},\theta_d) ; & M_e=M_o \end{bmatrix} \\
&\times K^{M+1}e^{ik_d\rho\cos(\theta-\theta^{M+1})} \qquad (5)
\end{aligned}
$$

식(5)에서 m은 유전체 내부에서의 반사횟수로, C_1면 반사횟수 M_o와 C_2면 반사회수 M_e의 합을 의미하며, D는 각 ray의 존재영역 (lit region)으로 주어진 transition 각과 경계면 사이에 존재함을 의미한다. transition각으로 C_1면의 반사각 θ^r, 유전체 내부 투과각 θ^1, (2m-1)번 내부 반사후 유전체 내부에서 진행하는 각 θ^{2m},(2m-1)번 내부 반사후 C_2면을 통해 외부로 투과해 나가는 각 $\theta^{2m.t}$의 표현을 쓰면 임의의 transition각은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$
\begin{aligned}
&\theta^r=2\theta_d-\theta_i,\quad \theta^1=\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\cos(\theta_i-\theta_d)\right)+\theta_d \\
&\theta^{2m-1}=(2m-2)\theta_d+\theta^1,\quad \theta^{2m-1.t}=\cos^{-1}(\sqrt{\varepsilon}\cos\theta^{2m-1}) \\
&\theta^{2m}=-(2m-2)\theta_d-\theta^1,\quad \theta^{2m.t}=\cos^{-1}(\sqrt{\varepsilon}\cos(\theta^{2m}-\theta_d)) \\
&\qquad +\theta_d. \qquad (6)
\end{aligned}
$$

단위 평면파 u_i가 입사시 (m-1)번 내부 반사후의 ray의 크기 K^m과, 이 ray가 유전체 밖으로 투과할때의 ray 크기 $K^{m.t}$는

$$K^m = T^oR^1R^2 \ldots R^{m-1}, \qquad (7.a)$$

$$K^{m.t} = T^oR^1R^2 \ldots R^{m-1}T^m, \qquad (7.b)$$

으로 Fresnel 투과계수 T와 반사계수 R은 다음과 같이 각 ray의 반사.투과시에 주어진다.

$$T^o = \frac{2\sin(\theta_d-\theta_i)}{\sin(\theta_d-\theta_i)+\sqrt{\varepsilon-\cos^2(\theta_d-\theta_i)}},$$

$$R^o = T^o - 1, \qquad (8.a)$$

$$T^{m+1} = \frac{-2\sin(\theta^1+m\theta_d)}{-\sin(\theta^1+m\theta_d)+\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}-\cos^2(\theta^1+m\theta_d)}},$$

$$R^{m+1} = T^{m+1} - 1. \qquad (8.b)$$

식(4)의 u를 식(5)의 u_g로 근사하여 A의 근사해를 A_p를 계산하고, 이를 식(3)에 대입하여 역 Fourier 변환을 계산하면 u의 물리광학 근사해 u_p를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$u_p(\rho,\theta) = u_g(\rho,\theta) + \begin{bmatrix} v_2(\rho,\theta), & s_d \\ v_1(\rho,\theta), & s_v \end{bmatrix} \qquad (9.a)$$

$$v_j(\rho,\theta) = \frac{(-1)^m i}{4\pi}\int_{SDP} dw\; f_j(w)e^{ik_j\rho\cos(w-\theta)} \qquad (9.b)$$

여기서

$$
\begin{aligned}
f_j(w) &= \frac{h_j\sin(\theta_d-w)+\sin(\theta_i-\theta_d)}{h_j\cos(\theta_d-w)-\cos(\theta_i-\theta_d)} \\
&+R^o\frac{h_j\sin(\theta_d-w)+\sin(\theta^r-w)}{h_j\cos(\theta_d-w)-\cos(\theta^r-w)} \\
&+\sum_{m=1}^{M_e} K^{2m.t}\frac{h_j\sin(\theta_d-w)+\sin(\theta^{2m.t}-w)}{h_j\cos(\theta_d-w)-\cos(\theta^{2m.t}-w)} \\
&+\sum_{m=1}^{M_o} K^{2m-1.t}\frac{h_j\sin w+\sin\theta^{2m-1.t}}{h_j\cos w+\cos\theta^{2m-1.t}}, \qquad (10)
\end{aligned}
$$

으로 j=1,2 로서 각각 $h_j=1,\sqrt{\varepsilon}$ 및 $f_j= f_1,f_2$를 의미한다. 식(10)를 식(9,b)에 대입하여 asymptotic 적분 으로 부터 v_1과 v_2는 모서리 회절파임을 보일 수 있어서, f_j는 회절분포 함수임을 알 수 있다.

4. 물리광학 근사해의 수정원

A의 정확한 표현으로 A_p에 교정항 A_c를 더하여 표시할 수 있고, 이를 식(1)에 대입하여 교정항 A_c에 대해 다음과 같은 수정 쌍적분 방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{cases} F^{-1}[KA_c]=u_i-F^{-1}[KA_p]=v_1, & s_d, \quad (11.a) \\ F^{-1}[A_c]=-F^{-1}+[A_p]=-v_2, & s_v \quad . (11.b) \end{cases}$$

식(11)에서 A_c를 만드는 수정원으로 두가지의 모형을 취하기로 하자. 먼저 v_1과 v_2는 식(9.b)에서 보인 바와 같이 모서리에서 멀리 떨어진 곳에서asymptotically 계산하면 모서리 회절파이므로, 수정원을 모서리 끝에 다극선 전원으로 등가시킬 수 있다. 이 다극선 전원의 계수는 식(11)로 부터 수치계산으로 구할 수 있다. 그러나 쐐기형 유전체의 모서리는 수학적으로 특이점이므로, 모서리 끝에서 산란파는 모서리 조건을 만족해야 한다. 쐐기형 유전체의 산란파는 변수분리 형태로 표시하지 않으므로 정확한 모서리 조건은 없으나, static limit 에서의 모서리 조건 [4]을 취하여 이를 모서리 끝에서 만족하도록 하는 수정원을 생각할 수 있다. 완전도체 쐐기에서는 정확한 해가 알려져 있으므로 이를 쐐기형 유전체의 경우로 일반화시켜, 한경계면(그림 1에서 c_1)에 분포한 수정자기 전류 m_1과 수정전기전류 j_2 를 다음과 같이 Bessel 함수의 급수로 전개하면,

$$m_1(\rho) = i \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_{\frac{1}{v}+n}(k\rho) \qquad (12.a)$$

$$j_1(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(\frac{1}{v}+n)\frac{1}{\rho} J_{\frac{1}{v}+n}(k\rho) \qquad (12.b)$$

으로 다른 경계면 c_2에서도 m_2와 j_2를 각각 c_n과 d_n의 계수를 취하여 식(12)와 같은 형태로 표현 할 수 있다. 이때 v는 쐐기형 유전체의 static 모서리 조건으로 쐐기각 θ_d와 함께 상대 유전상수 ϵ를 다음과 같은 관계식으로 만든다.[5]

$$\epsilon = -\frac{\tan(\frac{2\pi-\theta_d}{2v})}{\tan(\frac{\theta_d}{2v})} \qquad (13)$$

식(12)와 같은 수정원으로 부터 교정항 A_c를 식(5)로 부터 계산하고, 이를 역 Fourier 변환을 취하면,

$$F^{-1}[K(\alpha,\beta)A(\alpha,\beta)]=-\frac{i}{4\pi}\int_{SDP} dw\ g_1(w)\, e^{ik_v\rho\cos(w-\theta)}, \qquad (14.a)$$

$$F^{-1}[A(\alpha,\beta)]=-\frac{i}{4\pi}\int_{SDP} dw\ g_2(w)\, e^{ik_d\rho\cos(w-\theta)}, \qquad (14.b)$$

를 얻게 되는데, j=1,2일때 $g_j=g_1, g_2$ 이고 $k_j=k_v, k_d$이며 $h_j=k/k_v$, k/k_d 를 각각 의미한다고 하면 계수 a_n, b_n, c_n, d_n을 갖는 급수형태로 g_i 를 나타낼 수 있으나, 모서리로 부터 멀리 떨어진 곳, 즉 복소 w 평면의 실수축 상에서는 계수의 수렴도가 늦어서 급속히 수렴하는 계수 A_m, B_m, C_m, D_m 를 갖는 급수형태로 변환하면 g_j 를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$g_j(w)=\sum_{m=0}^{\infty}[\{A_m\frac{\sin w}{h_j^2-\cos^2 w}+B_m\}e^{-i/v\sin^{-1}(\frac{1}{h_j}\cos w)}\{\sin^{-1}(\frac{1}{h_j}\cos w)\}^m$$
$$+\{C_m\frac{\sin(\theta_d-w)}{\sqrt{h_j^2-\cos^2(\theta_d-w)}}+D_m\}e^{-i/v\sin^{-1}(\frac{1}{h_j}\cos(\theta_d-w))}$$
$$\times\{\sin^{-1}(\frac{1}{h_j}\cos(\theta_d-w))\}^m] \qquad (15)$$

식(9.b)와 (14)를 식(11)에 대입하면, 계수 A_m, B_m, C_m D_m에 대한 다음과 같은 쌍급수 방정식을 얻을 수 있다.

$$g_1(w) = f_1(w)\ , \ R_v \quad , \qquad (16.a)$$

$$g_2(w) = f_2(w)\ , \ R_d \quad , \qquad (16.b)$$

여기서 R_v, R_d는 유전체 외부와 내부영역의 각각 복소 w 평면에서 대응하는 영역을 의미한다. 식(16)을 식(15)에서 주어진 계수들에 대해서 수치해석으로 구하고, 이를 이용하면 교정된 전체전계 u 를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$u(\rho,\theta)=u_g(\rho,\theta)+\begin{cases} u_{d_2}(\rho,\theta), & s_d, \\ u_{d_1}(\rho,\theta), & s_v, \end{cases} \qquad (17.a)$$

$$u_{d_j}(\rho,\theta)=-\frac{i}{4\pi}\int_{SDP} dw\ P_j(w)e^{ik_j\rho\cos(w-\theta)} \qquad (17.b)$$

여기서 j=1,2 이고 p_1,p_2는 다음과 같이 주어진다.

$$p_1(w) = f_1(w) - g_1(w) \qquad (18.a)$$

$$p_2(w) = g_2(w) - f_2(w) \qquad (18.b)$$

5. 수치 계산

그림 3은 식(16)에서 주어진 수정 쌍급수 방정식을 푸는 것으로 a)는 12개의 계수로 전개한 다극선 전원으로, b)는 경계면에 분포된 수정원의 변형된 급수에서 16개의 계수로 부터 구한 g_1과 g_2를 보인다. 두경우 모두 수정 쌍적분 방정식을 잘 만족함을 보이고, 특히 a)에서 보다 b)에서 오차도 적고 ε =2일때 $\frac{2}{3}\pi < w < 2\pi$ 에서 g_1의 파형이 ε = 5,10과 유사하여 정확한 해에 더 가까움을 알 수 있다.

그림 4에서는 θ_d=120°,θ_i=60°,ε=5 일때 모서리로 부터 5파장($\rho = 5\lambda$)떨어진 곳에서 전계의 진폭패턴을 1°간격으로 그린 것이다. a)는 식(5)에서 주어진 기하광학파 u_g이고 b)는 물리광학파로 transition각에서의 불연속은 없어졌으나 두 경계면인 θ = 0°, 120° 근방에서 불연속이 나타나다. c)와 d)는 각각 다극선 전원과 경계면에 분포한 수정원으로 교정한 수정해를 그린 것으로 transition 각과 경계면 근방에서 smooth한 변화를 보인다.

6. 결 론

임의의 각을 갖는 쇄기형 유전체에 대한 물리광학해를 간단한 해석함수로 표현하였다. 이를 교정하는 수정원으로 다극선 전원과 모서리 근방에서 far field 에서 계산한 결과는 거의 비슷하나 후자의 모형이 수정오차가 적고 정확한 해에 좀 더 근접함을 보았다.

참 고 문 헌

1. L. Lewin and I. Sreenivasiah, "Diffraction by a dielectric wedge," Scientific Rep., no. 47, Dept. of Elec.Eng., Univ. of Colorado, 1979
2. C.S. Joo, J.W. Ra, and S.Y. Shin, "Scattering by right an dielectric wedge," IEEE Trans. AP, Vol. 32, pp.61-69, 1984
3. S.Y. Kim, J.W. Ra, and S.Y. Shin, "Edge diffraction by dielectric wedge of arbitrary angle," Electro. Lett., Vol. 19, pp. 851-853, 1983
4. J.B. Andersen and V.V. Solodukhov, "Field behavior near a dielectric wedge," IEEE Trans. AP, Vol. 26, pp. 598-602, 1978

그림 설명

그림 1. 쇄기형 유전체의 구조

그림 2. C_2면 입사시의 Ray-tracing

그림 3. 물리광학 근사해를 교정하는 g_1과 g_2 패턴

a) 다극선 전원의 경우

b) 경계면에 분포한 수정원의 경우

그림 4. 전계의 진폭패턴 : θ_d=120°, θ_1=60°, ε=2, ρ=5λ ;

a) 기하광학파 b) 물리광학파

c) 다극선 전원으로 교정된 수정해

d) 경계면에 분포한 수정원으로 교정된 수정해

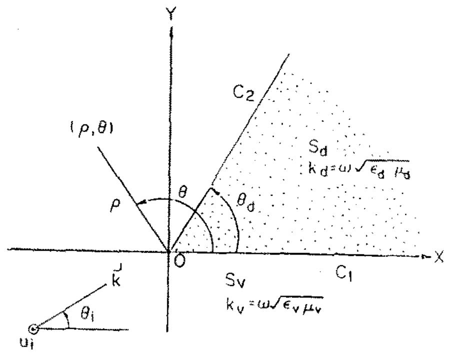

그림1

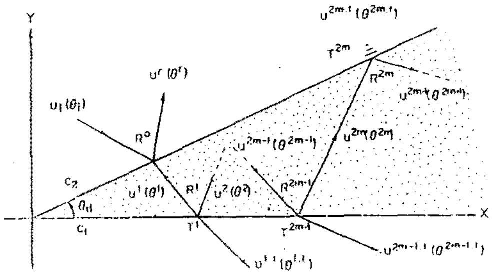

그림2

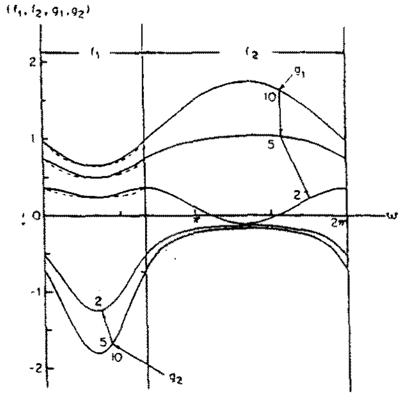

그림3 . a

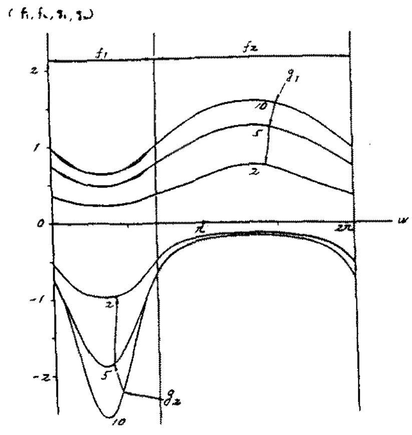

그림3 . b

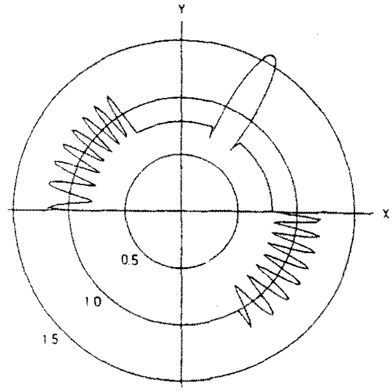

그림4 . a

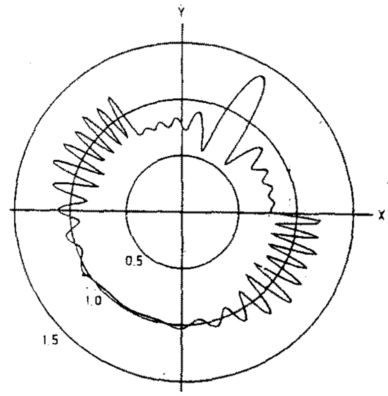

그림4 . b

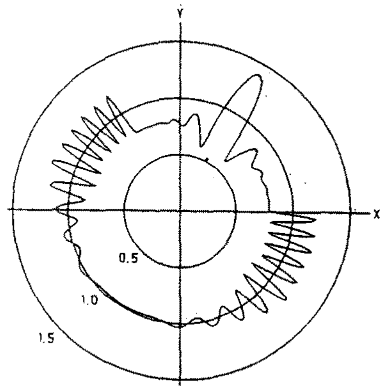

그림4 . c

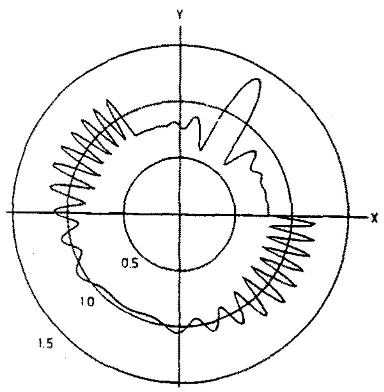

그림4 . d