대한전기학회 1984년도 하계학술회의 논문집 1984년 7월 20일

특이섭동기법을 이용한 대규모계통의 부분상태궤환 외란흡수 제어기(DAC) 설계에 관한 연구

On the Disturbance Absorbing Controller Design for a class of Large Scale System using Singular Perturbation Technique

천 희 영 : 고려대학교
박 귀 태 : 고려대학교
이 기 상 : 단국대학교
홍 동 우* : 고려대학교

1. 서 론

많은 물리적계통은 외란이 발생하는 환경속에서 작동하며 이들 외란은 계통특성에 큰 영향을 주기때문에 이를 처리하기위해 상태피이드백 제어방식등이 이용되어왔다. 그러나 이러한 이론은 개념적으로모든 차수의 모델에대하여 타당함에도 불구하고 여러제약조건 및 해석의 난해함으로인해 대형계통에의 적용이 곤란하다.

본 연구에서는 대형계통에서의 외란처리 및 계통안정화를 위해 원래계통에 투입되는 외란의 영향을 배제하고 동시에 계통을 안정화하는 외란흡수제어기(Disturbance Absorbing controller)의 설계방안을 제시하고 그 특성을 고찰함에 목적을 두었다.

1.1 문제의 설정

다음 계통을 고려한다.

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)+Fw(t), \quad x(t_0)=x_0 \tag{1}$$

위의 계통이 느린 동특성 및 빠른 동특성을 지닌다고 가정하면 식(1)은 식(2)와같이 분리할수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t)&=A_{11}x_1(t)+A_{12}x_2(t)+B_1u(t)+F_1w(t) \\ \mu\dot{x}_2(t)&=A_{21}x_1(t)+A_{22}x_2(t)+B_2u(t)+F_2w(t) \end{aligned} \tag{2}$$

그리고 식(2)에서 $\mu=0$ 로 취급함으로서 식(1)의 계통은 느린 동특성에 대응하는 부계통과 빠른 동특성에 대응하는 부계통으로 다음과같이 분리된다.[3]

느린 부계통

$$\dot{x}_s(t)=A_0x_s(t)+B_0u_s(t)+F_0w(t), \quad x_s(0)=x_{10} \tag{3}$$

빠른 부계통

$$\mu\dot{x}_f(t)=A_{22}x_f(t)+B_2u_f(t) \tag{4}$$

여기서 $A_0=A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$, $B_0=B_1-A_{12}A_{22}^{-1}B_2$, $F_0=F_1-A_{12}A_{22}^{-1}F_2$ 이며 μ 는 작은 정(+)의 상수이고 x_s, u_s, x_f 및 u_f 는 각각 $x_s\cong\bar{x}_1$, $u_s\cong\bar{u}$, $x_f=x_2-\bar{x}_2$, $u_f=u-\bar{u}$이며 " - "는 $\mu=0$ 인 경우의 값을 나타낸다. 식(1)(2)(3)(4)에서부터 모우드 분리시 외란의 영향은 식(3)의 느린 부계통에만 귀속됨을 알수있다. 따라서 본 연구에서는 느린 부계통에대한 외란흡수제어기만을 설계하고 이를 이용해서 원래계통의 외란처리와 안정화를 달성할수 있음을 보이겠다.

2. 느린 부계통에대한 외란흡수제어기 설계

식(3)에서 (A_0, B_0)가 가제어이면 $\lambda_i(A_0+B_0G_0)<0$ 인 G_0가 존재하며 외란의 모델링이 가능한 경우 이것을 결합한 느린 부계통은 다음으로 쓸수 있다.

$$\dot{x}_s(t)=A_0x_s(t)+B_0(u_{ss}+u_{sw})+F_0w(t) \tag{5a}$$

$$\begin{aligned} \dot{z}(t)&=Dz(t) \\ w(t)&=Hz(t) \end{aligned} \tag{5b}$$

이고

여기서 D, H 는 기지행렬이며 u_{ss} 는 계통안정화를 위한 입력이며 u_{sw} 는 외란처리를 위한 입력이다

여기서 $F_0=B_0\Gamma$ 라고 가정하면 식(5)는 식(6)과 같다.

$$\dot{x}_s(t)=(A_0+B_0G_0)x_s(t)+B_0(u_{sw}(t)+\Gamma Hz(t)) \tag{6}$$

식(6)에서 $\lim_{t\to\infty}x_s(t)\to 0$ 이기위해서는 $\lim_{t\to\infty}(u_{sw}+\Gamma Hz)\to 0$ 이어야하므로 이를 만족하는 입력을 $u_{sw}(t)=\Gamma H y(t)$ (여기서 $y(t)$는 임의 변수)로 선택할수 있으며 식(6)은 식(7)로 된다.

$$\dot{x}_s(t)=(A_0+B_0G_0)x_s(t)+B_0\Gamma H(y(t)+z(t)) \tag{7}$$

이제 $\lim_{t\to\infty}x_s(t)\to 0$ 이기위해서는 $\lim_{t\to\infty}(y(t)+z(t))\to 0$ 이어야하므로 변수$y(t)$는 다음으로 설정할수 있다

$$\dot{y}(t)=Dy(t)+Cx_s(t) \tag{8}$$

여기서 $\lim_{t\to\infty}x_s(t)\to 0$ 이므로 $t\to\infty$ 에서 $y(t)$는 $z(t)$와 같은 특성을갖는다. 위의 논의로부터 제어기의 구조 및 존재는 다음과같이 정리화할수 있다.

[정 리 1]

식(9)로 주어진 계통 및 보조계통으로 구성된 계통에서 (A_0, B_0, F_0, H, D)가 각각 $(n_1\times n_1)(n_1\times m)(n_1\times q)(q\times q)$ 및 $(q\times q)$ 행렬이고 $F_0=B_0\Gamma$ 인

Γ 가 존재하며 $w(t)=0$ 일때 계통을 안정화하는 행렬 C, G_0 가 존재하면 즉,

$$\dot{x}_s(t)=A_0x_s(t)+B_0u_s(t)+F_0w(t),\quad w(t)=0 \tag{9a}$$

$$u_s(t)=G_0x_s(t)+\Gamma H\gamma(t) \tag{9b}$$

$$\dot{\gamma}(t)=D\gamma(t)+Cx_s(t) \tag{9c}$$

윗식(9a)(9b)(9c)를 하나의 폐루우프계로 작성하면 식(10)으로 된다.

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_s(t)\\ \dot{\gamma}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_0+B_0G_0 & B_0\Gamma H\\ C & D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_s(t)\\ \gamma(t)\end{bmatrix} \tag{10}$$

식(10)에서 계통을 안정화하는 행렬 C 및 G_0가 존재하면 식(5b)에의해 지배되는 외란을 포함한 계통은 다음 특성을 갖는다.

$$\lim_{t\to\infty} x_s(t_0;x_0,\gamma_0,z_0)=0,\quad \forall(x_0\ \gamma_0\ z_0) \tag{11}$$

[증 명]

다음 변수를 정의한다.

$$\varepsilon(t)=\gamma(t)+z(t) \tag{12}$$

식(12)에 미분을 취한다음 정리하면

$$\dot{\varepsilon}(t)=\dot{\gamma}(t)+\dot{z}(t)=Cx_s(t)+D\varepsilon(t) \tag{13}$$

되고 따라서 식(13)을 식(10)에 도입하면 외란을 포함시킨 결과는 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_s(t)\\ \dot{\varepsilon}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_0+B_0G_0 & B_0\Gamma H\\ C & D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_s(t)\\ \varepsilon(t)\end{bmatrix} \tag{14}$$

식(14)는 외란항을 포함시킨 경우의 폐루우프 방정식이고 가정에의해 $\lambda_i<0\ \ \forall i=1,2,\cdots,(n_1+q)$ 이므로 모든 초기치에대해 다음 식이 만족된다

$$\lim_{t\to\infty} x_s(t;x_0,\varepsilon_0)=\lim_{t\to\infty}\varepsilon(t;x_0,\varepsilon_0)=0 \tag{15}$$

— 증명 끝

이제 계통을 안정화하는 C 및 G_0행렬을 결정하기위해 식(14)에 다음의 변환행렬을 도입하고

$$T=\begin{bmatrix}I_n & 0\\ K_{21} & I_p\end{bmatrix} \tag{16}$$

이득 G_0를 상태변수 $x_s(t)$에만 대응되는 이득 Ω 와 ε 에 대응하는 $-\Gamma HK_{21}$ 으로 분리해서

$$G_0=\Omega-\Gamma HK_{21} \tag{17}$$

으로 놓고 정리하면 식(18)을 얻는다.

$$\begin{bmatrix}\dot{\bar{x}}_s(t)\\ \dot{\bar{\varepsilon}}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_0+B_0\Omega & B_0\Gamma H\\ -K_{21}(A_0+B_0\Omega)+(C+DK_{21}) & D-K_{21}B_0\Gamma H\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}_s(t)\\ \bar{\varepsilon}(t)\end{bmatrix} \tag{18}$$

식(18)에서 $-K_{21}(A_0+B_0\Omega)+(C+DK_{21})=0$ 가 되는 제어계설계는

$$\lambda_i(A_0+B_0\Omega)<0\quad \forall i=1,2,\cdots,n_1 \tag{19}$$

인 Ω 의 선정문제 및

$$\lambda_i(D-K_{21}B_0\Gamma H)<0\quad \forall i=1,2,\cdots q \tag{20}$$

인 K_{21} 의 선정문제로 되므로 C 행렬을 다음과같이 선정한다.

$$C=K_{21}(A_0+B_0\Omega)-DK_{21} \tag{21}$$

식(21)을 식(18)에 대입 정리하면

$$\begin{bmatrix}\dot{\bar{x}}_s(t)\\ \dot{\bar{\varepsilon}}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_0+B_0\Omega & B_0\Gamma H\\ 0 & D-K_{21}B_0\Gamma H\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}_s(t)\\ \bar{\varepsilon}(t)\end{bmatrix} \tag{22}$$

식(22)에서 Ω 는 ($A_0+B_0\Omega$)를 안정화하는 이득이므로 일반적인 극점배치기법에의하여 구할수 있으며 K_{21} 은 임의행렬이므로 $-K_{21}F_0=\Delta$ 가 되도록 다음으로 정의될 수 있다.

$$K_{21}=-\Delta(F_0^TF_0)^{-1}F_0^T,\quad(\Delta:q\times \mathrm{rank}\,B_0) \tag{23}$$

따라서 식(20)에대한 극점배치는

$$\lambda_i(D+\Delta H)<0\quad \forall i=1,2,\cdots,q \tag{24}$$

인 Δ 의 선정함으로서 가능하다. 이제 이득 $G_0=\Omega-\Gamma HK_{21}$ 의 각 요소와 행렬 C 가 결정되었으므로 식(9b)(9c)의 제어기를 구성할수 있다.

$$u_s(t)=G_0x_s(t)+\Gamma H\gamma(t) \tag{9b}$$

$$\dot{\gamma}(t)=D\gamma(t)+Cx_s(t) \tag{9c}$$

식(17)(9c)를 식(9b)에 대입하면

$$\begin{aligned}u_s(t)&=(\Omega-\Gamma HK_{21})x_s(t)+\Gamma H\int(D\gamma(t)+Cx_s(t))\,dt\\&=(\Omega-\Gamma HK_{21})x_s(t)+\Gamma HD\int\gamma(t)\,dt+\Gamma HC\int x_s(t)\,dt\end{aligned} \tag{25}$$

특히, 일정외란인경우에는 $D=0$ 이므로

$$u_s(t)=(\Omega-\Gamma HK_{21})x_s(t)+\Gamma HC\int x_s(t)\,dt \tag{26}$$

식(26)에 K_{21}, C 를 대입하면 최종적인 제어입력은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}u_s(t)=&(\Omega+\Gamma H\Delta(F_0^TF_0)^{-1}F_0^T)x_s(t)\\&-\Gamma H\Delta(F_0^TF_0)^{-1}F_0^T(A_0+B_0\Omega)\int x_s(t)\,dt\end{aligned} \tag{27}$$

식(27)에서 Δ 의 고유치를 $\lambda_i(\Delta)\ll 0$ 으로 배치함으로서 외란으로인한 과도현상을 임의 시간내에 억제할 수 있으며 따라서 그 후의 계통응답은 $\dot{x}_s(t)=(A_0+B_0\Omega)x_s(t)$ 에 의해서만 좌우된다.

3. 원래 계통에의 도입

전절에서 설계한 $u_s(t)$는 부 계통에대한 제어입력이므로 이것을 전체계통에 적용하기위해 본절에서 $\lambda_i(A_{22})\ll 0$ 라고 가정함으로서 즉, 느린 상태변수만을 궤환시키는 부분상태궤환제어기를 설계한다. 따라서 전체제어입력은 식(28)로 쓸수 있다.

$$\begin{aligned}u(t)&=N_sx_s(t)+M_s\int x_s(t)\,dt\\N_s&=\Omega+\Gamma H\Delta(F_0^TF_0)^{-1}F_0^T,\\M_s&=-\Gamma H\Delta(F_0^TF_0)^{-1}F_0^T(A_0+B_0\Omega)\end{aligned} \tag{28}$$

식(28)의 제어입력은 부 계통의 상태 $x_s(t)$로 표현되었으므로 원래계통에 도입하기위해 $x_s(t)\cong x_1(t)$ 으로 놓을수가 있다.

즉,

$$\begin{aligned}u(t)&=N_sx_1(t)+M_s\int x_1(t)\,dt\\&=(\Omega+\Gamma H\Delta(F_0^TF_0)^{-1}F_0^T)x_1(t)-\Gamma H\Delta(F_0^TF_0)^{-1}F_0^T(A_0+B_0\Omega)\int x_1(t)\,dt\end{aligned} \tag{29}$$

4. 폐 루우프 특성

느린 부계통에대한 폐루우프 특성은 [정리 1]에서 이미 언급한바와같이 식(14)(22)를 고찰함으로서 식(28)의 입력을 인가함으로서 계통의 안정화 및 외란의 영향이 배제됨을 보였다.

그러나 실제제어기가 도입될 정확한 계통 표현식은 식(1) 이다. 따라서 부분적상태 $x_1(t)$만 에의해 구성된 식(28)의 입력을 식(1) 계통에 도입한 경우 전체 폐루우프의 안정도 및 외란처리특성의 여부는 매우중요한것 이다. 먼저 전체 폐루우프 계를 구하기위해 원래계통

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) + F w(t) \tag{30}$$

또는

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= A_{11} x_1(t) + A_{12} x_2(t) + B_1 u(t) + F_1 w(t) \\ \mu \dot{x}_2(t) &= A_{21} x_1(t) + A_{22} x_2(t) + B_2 u(t) + F_2 w(t) \end{aligned} \tag{31}$$

에

$$\begin{aligned} u(t) &= G_0 x_1(t) + \Gamma H \psi(t) \\ \dot{\psi}(t) &= C x_1(t) \end{aligned} \tag{32}$$

또는

$$\begin{aligned} u(t) &= (\Omega + \Gamma H \Delta F_0^{\#}) x_1(t) + \Gamma H \psi(t) \\ \dot{\psi}(t) &= -\Delta F_0^{\#} (A_0 + B_0 \Omega) x_1(t) \end{aligned} \tag{33}$$

(단, $F_0^{\#} = (F_0^T F_0)^{-1} F_0^T$)

의 제어입력을 도입하면 폐루우프제어계는 다음으로 구해진다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) = [A_{11} + B_1(\Omega + \Gamma H \Delta F_0^{\#})] x_1(t) + A_{12} x_2(t) \\ + B_1 \Gamma H \psi(t) + F_1 w(t) \end{aligned} \tag{34}$$

$$\dot{\psi}(t) = [-\Delta F_0^{\#}(A_0 + B_0 \Omega)] x_1(t) \tag{35}$$

$$\begin{aligned} \mu \dot{x}_2(t) = [A_{21} + B_2(\Omega + \Gamma H \Delta F_0^{\#})] x_1(t) + A_{22} x_2(t) \\ + B_2 \Gamma H \psi(t) + F_2 w(t) \end{aligned} \tag{36}$$

이제 폐루우프 제어계의 안정도 및 외란처리효과는 다음과같이 정리에의해 입증된다.

[정 리 2]

A_{22} 의 모든 고유치가 부(-)의 실수성분을 갖고 ($A_0 + B_0 \Omega$)와 ($D - K_{21} B_0 \Gamma H$)의 모든 고유치도 부(-)의 실수성분을 가지면 $\mu \in [0, \mu^*]$ 인 모든 정(+)의 상수 μ 에대하여 전체 폐루우프 식(34)(35)(36)도 안정하며 따라서, 식(22)로부터 외란의 영향은 ($D - K_{21} B_0 \Gamma H$)의 고유치를 적절히 선정함으로서 임의 시간내에 배제할수 있다.

[증 명]

가정에의해 $\lambda_i(A_{22}) \ll 0 \quad \forall i = 1, 2, \cdots, n_2$ 이면 위 정리는 식(34) -(36)에 다시 특이섭동기법을 적용함으로서 증명할수 있다. 즉, 식(36) 에서 $\mu = 0$ 라 하면 식(34) - (36)은 다음으로 쓸수있다.

$$\dot{\bar{x}}_1(t) = [A_{11} + B_1(\Omega + \Gamma H \Delta F_0^{\#})] \bar{x}_1(t) + A_{12} \bar{x}_2(t) + B_1 \Gamma H \psi(t) + F_1 w(t) \tag{37}$$

$$\dot{\psi}(t) = [-\Delta F_0^{\#}(A_0 - B_0 \Omega)] \bar{x}_1(t) \tag{38}$$

$$0 = [A_{21} + B_2(\Omega + \Gamma H \Delta F_0^{\#})] \bar{x}_1(t) + A_{22} \bar{x}_2(t) + B_2 \Gamma H \psi(t) + F_2 w(t) \tag{39}$$

식(37) - (39) 에서 " − "는 시간분리상수 $\mu = 0$ 를 나타낸다. 느린 부 계통을 구하기위해 식(39) 에서 $\bar{x}_2(t)$를 구하면

$$\bar{x}_2(t) = -A_{22}^{-1} [[A_{21} + B_2(\Omega + \Gamma H \Delta F_0^{\#})] \bar{x}_1(t) + B_2 \Gamma H \psi(t) + F_2 w(t)) \tag{40}$$

식(40)을 식(37)에 대입하고 정리하면

$$\dot{\bar{x}}_1(t) = [A_0 + B_0(\Omega + \Gamma H \Delta F_0^{\#})] \bar{x}_1(t) + B_0 \Gamma H \psi(t) + F_0 w(t) \tag{41}$$

식(41) 에서 $\bar{x}_1(t) \triangleq x_s(t)$의 정의를 도입하고 보조변수 $\psi(t)$의 방정식과 함께쓰면 다음으로 구해진다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_s(t) &= [A_0 + B_0(\Omega + \Gamma H \Delta F_0^{\#})] x_s(t) + B_0 \Gamma H \psi(t) + F_0 w(t) \\ \dot{\psi}(t) &= [-\Delta F_0^{\#}(A_0 + B_0 \Omega)] x_s(t) \end{aligned} \tag{42}$$

이제 식(42)로 구성된 느린 부 계통의 특성을 고찰하기위해 식(16)의 변환행렬을 도입하면

$$T = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -\Delta F_0^{\#} & I_p \end{bmatrix}$$ 에의해

$$T^{-1} \begin{bmatrix} (A_0 + B_0 \Omega) & B_0 \Gamma H \\ 0 & \Delta F_0^{\#} B_0 \Gamma H \end{bmatrix} T$$ 를 구하면(43)

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_s(t) \\ \dot{\tilde{\psi}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 + B_0 \Omega & B_0 \Gamma H \\ 0 & \Delta F_0^{\#} B_0 \Gamma H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_s(t) \\ \tilde{\psi}(t) \end{bmatrix} \tag{44}$$

식(44)는 식(22)와같은 특성을 가지므로 정리 1 에의해 식(42)의 느린 부계통은 식(10)과 같은 특성을 갖는다.

즉, $\lambda_i < 0 \quad \forall i = 1, 2, \cdots, (n_1 + q)$ 이면

$$\lim_{t \to \infty} x_s(t; x_{s0}, \psi_0) = \lim_{t \to \infty} \psi(t; x_{s0}, \psi_0) = 0$$

따라서, 식(32)의 제어입력은 원래계통을 안정화하는 동시에 미지외란의 영향이 임의 시간내에 배제됨이 명백하다. - 증명 끝.

4. 결 론

본 연구에서는 외란을 포함한 대규모 계통의 제어기 설계에 특이섭동기법을 도입해서 계통을 안정화하는 동시에 외란처리를 효과적으로 할수 있는 부분상태궤환 외란흡수제어기를 제안하고 그 특성을 고찰했다. 설계는 부 계통에대해서 이루어지며 선형변환에의해 계통의 안정화를 위한 이득결정 및 외란처리를위한 입력결정문제로 분리 취급됨으로서 매우 간단하며 제안된 제어기는 외란의효과가 특이섭동기법에의해 구한 저차 모델중 느린 부계통에만 귀속된다는 특성을 이용했기때문에 매우 작은 차수로 구성된다는 장점을 갖는다.

참 고 문 헌

1. C.D. JoHNSoN
"FURTHER STUDY OF THE LINEAR REGULATOR WiTH DiSTURBANCES THE CASE OF VECTOR DiSTURBANCES SATiSSYiNG A LiNEAR DiFFERENTiAL EQUATiON".
IEEE TRANS. AUTOMATiC CONTROL AC-15 PP222-228 APRiL 1970.

2.

C.D. JOHNSON

"ACCOMMODATION OF EXTERNAL DISTURBANC-

ES IN LINEAR REGULATOR AND SERVOMECH

ANISM PROBLEMS."
IEEE TRANS. AUTOMATIC CONTROL AC-16
PP 635-644 DECEMBER 1971

3.

M.S.MAHMOUD AND MADAN G.SINGH

"LARGE SCALE SYSTEMS MODELLING."
PERGAMON PRESS. 1981 pp297-321

4.
L.LITZ AND H.ROTH
"STATE DECOMPOSITION FOR SINGULAR
PERTURBATION ORDER REDUCTUON-
A MODAL APPROACH." INT. J. CONTROL.
1981. vol-34. pp.937-954