확률 적응 제어에서의 최소 자승법에 관한 연구

A Study on the Least Squares Method in a Stochastic Adaptive Control

양 해 원

명지 대학교
전기 공학과

1. 서 론

대부분의 제어 이론은 대상 시스템의 특성을 나타내는 수학적 모델이 주어진 것으로 가정하고 있다. 그러나 실제 응용에 있어서 시스템의 특성을 충실하게 표현하는 모델을 구하는 것 즉 identification 은 간단하지 않으며 또한 제반 요인에 의하여 시스템의 특성이 바뀌게 되면 다시 identification 을 하여야 한다. 이러한 문제에 착안하여 발전되어 온 것이 적응 제어 이론이다. 즉 시스템의 특성을 나타내는 수학적 모델을 끊임없이 개선하면서 적절한 제어기의 파라메타를 결정하거나 혹은 직접 제어기의 파라메타를 수정하는 방식을 일컫는다.

최근의 적응 제어 이론을 크게 분류하면 Self Tuning Regulator (STR) 와 Model Reference Adaptive Control (MRAC) 으로 나눌 수 있다. STR 은 확률적 잡음의 영향을 최소로 줄이려는 것이며, MRAC 는 대상 시스템의 출력을 기준 신호에 일치시키려는 것으로서 주로 deterministic 시스템을 대상으로 한다. MRAC 에 있어서의 잡음의 영향에 대하여는 요즈음 활발하게 연구되고 있으며 특히 Landau[1] Goodwin[2] 및 Moore[3] 등의 연구가 대표적이다. 이들이 제안한 방식들은 모두 종래의 최소 자승법을 조금씩 수정한 것으로서 파라메타 적응 법칙에서의 이득 행렬의 계산 방법에서 차이가 있지만 그 성능에 있어서는 별로 다를 바 없다.

한편 적응 제어의 기본 취지인 시스템의 특성에 변화가 있는 경우에는 위의 세가지 방식 모두 그다지 만족스럽지 못한 성능을 보이고 있다. 그러므로 본 연구에서는 새로운 방식을 도입하여 예제를 통한 computer simulation 에 의하여 그 유효성을 보여 주려 한다. 다만 현재로서는 이론적으로 완벽하지는 못하며 이 점에 관하여는 앞으로 계속 연구되어야 할 것이다.

2. 확률 시스템에 대한 적응 제어 방식

선형 시불변 유한 차원 단일입출력 시스템이 다음과 같은 Autoregressive Moving Average (ARMA) 의 형태로 기술 된다고 가정한다.

$$A(q^{-1})y(t) = q^{-1}B(q^{-1})u(t)+C(q^{-1})w(t) \quad (1)$$

단 $\{y(t)\}$, $\{u(t)\}$ 및 $\{w(t)\}$ 는 각각 출력, 입력 및 잡음을 나타내며 $A(q^{-1})$, $B(q^{-1})$ 및 $C(q^{-1})$ 는 단일 지연 연산자 q^{-1}의 다항식으로

$$A(q^{-1}) = 1+a_1q^{-1}+ \dots +a_nq^{-n} \quad (2)$$

$$B(q^{-1}) = b_1+b_2q^{-2}+ \dots +b_mq^{-(m-1)} \quad (3)$$

$$C(q^{-1}) = 1 + c_1q^{-1}+ \dots +c_\ell q^{-\ell} \quad (4)$$

이다. $\{w(t)\}$ 는 확률 공간에서 정의된 martingale difference sequence 으로서 σ- algebra F_t 를 발생시킨다. 여기서 $\{w(t)\}$ 에 대한 가정으로서

1) $E\{w(t)|F_{t-1}\} = 0 \quad a.s.$ (2)

2) $E\{w(t)^2|F_{t-1}\} = \sigma^2 \quad a.s.$ (3)

3) $\lim_{N\to\infty}\sup \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} w(t)^2 < \infty \quad a.s.$ (4)

으로 하며, $A(q^{-1}), B(q^{-1}), C(q^{-1})$의 계수와 σ^2은 미지이며 오직 $\{u(t)\}, \{y(t)\}$ 만을 얻을 수 있는 것으로 한다. 한편 대상 시스템에 대하여는

1) n, m, ℓ 의 상한은 알고 있다.
2) $C(z), B(z)$ 의 영점은 모두 단위원 밖에 있다.

을 가정한다.

이상과 같은 조건에서 피이드백 제어법을 결정하여 시스템을 안정시키며, 또한 $\{y(t)\}$가 어떤 유계인 기준 신호 $\{y^*(t)\}$ 에 최소한의 오차를 갖고 따라가도록 하는 것이 우리의 목적이다. 즉

$$\lim_{N\to\infty}\sup \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} y(t)^2 < \infty \tag{5}$$

$$\lim_{N\to\infty}\sup \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} u(t)^2 < \infty \tag{6}$$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} E\{[y(t) - y^*(t)]^2|F_{t-1}\} = \sigma^2 = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} E\{w(t)^2|F_{t-1}\} \tag{7}$$

단 $y^*(t)$ 는 기준 신호로서 시각 t 에서 $y^*(t+1)$ 은 알수 있는 것으로 한다.

만일 다항식 $A(q^{-1})$, $B(q^{-1})$ 및 $C(q^{-1})$ 의 계수를 알고 있으면 잘 알려진 바와 같이 다음과 같은 식에 의하여 최소 분산 제어기의 구성이 가능하다. 즉

$$C(q^{-1})[y(t+1) - w(t+1)] = [C(q^{-1})-A(q^{-1})]y(t+1) + B(q^{-1})u(t) \triangleq \alpha(q^{-1})y(t) + B(q^{-1})u(t) \tag{8}$$

그리고 기준 신호 $\{y^*(t)\}$ 는 유계 즉

$$|y^*(t)| < M < \infty \qquad t \geq 0 \tag{9}$$

이라고 가정한다.

이 때의 적응 제어 알고리즘은 다음과 같다.

$$\theta(t) = \theta(t-1) + \frac{P(t-1)\phi(t-1)}{1 + \phi(t-1)^T P(t-1)\phi(t-1)}[y(t) - \phi(t-1)^T\theta(t-1)] \tag{10}$$

$$P(t) = \frac{1}{\lambda_1(t)}\left[P(t-1) - \frac{\lambda_2(t)P(t-1)\phi(t-1)\phi(t-1)^T P(t-1)}{\lambda_1(t)+\lambda_2(t)\phi(t-1)^T P(t-1)\phi(t-1)}\right] \tag{11}$$

$$\theta = [\alpha_1, \ldots, \alpha_{n'}, b_1, \ldots, b_m, c_1, \ldots, c_\ell]^T \tag{12}$$

$$n' = \max(n, \ell)$$

$$\phi(t-1) = [y(t-1), \ldots, y(t-n'), u(t-1), \ldots, u(t-m), -\bar{y}(t-1), \ldots, -\bar{y}(t-\ell)]^T \tag{13}$$

$$\bar{y}(t) = \phi(t-1)^T\theta(t) \tag{14}$$

한편 시각 t 에서의 입력 즉 $u(t)$ 는

$$\phi(t)^T\theta(t) = y^*(t+1) \tag{15}$$

에 의하여 구하며 식 (11) 은 다음과 같이 쓸 수도 있다.

$$P(t)^{-1} = \lambda_1(t)P(t-1)^{-1} + \lambda_2(t)\phi(t-1)\phi(t-1)^T \tag{16}$$

여기서 식 (11) 혹은 식 (16) 의 $\lambda_1(t)$ 와 $\lambda_2(t)$ 의 선정 방법에 따라서 다음의 네 가지 방식으로 나눌 수 있다.

a) Landau[1] 의 방식

$$\lambda_1(t) = 1, \quad 0 < \lambda_2(t) < 2 \tag{17}$$

b) Goodwin[2] 의 방식

$\lambda_1(t) = \lambda_2(t) = 1$ 으로 하되 식 (11) 의 좌변을 $P'(t)$ 으로 놓고

$$\bar{r}(t) = \bar{r}(t-1)[1+\phi(t-1)^T P(t-1)\phi(t-1)] \tag{18}$$

을 계산하여

$$P(t) = \min\left\{1, \frac{K}{\bar{r}(t)\lambda_{max}P'(t)}\right\}P'(t) \tag{19}$$

가 된다. 여기서 $\lambda_{max}(*)$ 는 행렬 $(*)$ 의 최대 고유치를 의미하며 대신에 계산하기 쉬운 $trace(*)$ 를 써도 무방하다.

c) Moore[3] 의 방식

식 (10) 과 식 (11) 의 분모에서 1 대신 $1/\gamma(t)$ 을 쓰며 $\gamma(t)$ 의 결정 방법은 다음과 같다.

$$Q(t) = \phi(t-1)^T P(t-1)\phi(t-1) \quad (20)$$

$$\bar{\gamma}(t) = \begin{cases} 1 & : Q(t) \leq \frac{\bar{K}}{t} \\ \frac{C}{r(t)} & : Q(t) > \frac{\bar{K}}{t} \end{cases} \quad (21)$$

$$\bar{K} \gg 0 \ , \quad C > 0$$

$$r(t) = \sum_{j=1}^{t} \| \phi(j-1) \|^2 \quad (22)$$

$$r_1(t) = \max(t, r(t)) \quad (23)$$

$$\gamma(t) = \min \left\{ \bar{\gamma}(t) r_1(t)^{-\varepsilon}, \gamma(t-1) \right\} \quad (24)$$

$$0 < \varepsilon \ll 1$$

d) 본 연구에서 도입한 방식

$$0 < \lambda_1(t) < 1 \ , \quad 0 < \lambda_2(t) < 2 \quad (25)$$

3. 안정 및 수렴성 해석

b), c) 의 방식에 대하여는 제어 목적인 식 (5), (6), (7) 이 모두 만족되는 것이 증명되어 있지만, a), d) 의 경우는 아직 해결이 안된 부분이 남아 있으며 여기서 그것에 관하여 고찰하기로 한다.

식 (10) 에서 파라메타 $\theta(t)$ 의 적응법칙에 이용되는 출력 오차

$$\nu_0(t) = y(t) - \phi(t-1)^T \theta(t-1) \quad (26)$$

를 사전 출력 오차라 하며 이에 대하여

$$\nu(t) = y(t) - \phi(t-1)^T \theta(t) \quad (27)$$

를 사후 출력 오차라 한다. 여기서 $h(t)$ 를

$$h(t) = h(t-1) + \lambda_2(t)\phi(t-1)^T \phi(t-1) \quad (27)$$

으로 정의하면

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{t=1}^{N} \frac{[\nu(t) - w(t)]^2}{h(t)} < \infty \quad \text{a.s.} \quad (28)$$

은 증명이 가능하지만, Goodwin[2] 의 방법에 따라 시스템의 모든 신호가 유계 즉 시스템이 안정인 것을 보이기 위하여는

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{t=1}^{N} \frac{[\nu_0(t) - w(t)]^2}{h(t)} < \infty \quad \text{a.s.} \quad (29)$$

이 요구된다. 식 (28) 에서 식 (29) 를 유도하기 위하여는 식 (20) 의 $Q(t)$ 가 유한하다는 조건이 필요하게 되는데, 현재로서는 이러한 조건을 증명할 수 없기 때문에 b), c) 의 방식에서와 같은 수정된 최소 자승법이 제안된 것이다.

한편 d) 의 방식은 $Q(t)$ 가 유한하여야 한다는 면에서 보면 이 때의 $P(t)$ 가 a) 에서의 $P(t)$ 보다 크기 때문에 조금 더 불리하다. 결국 현 단계에서는 a), d) 의 방식이 주어진 제어 목적을 완전하게 달성한다고 할 수 없으므로 이 문제에 관하여는 앞으로 계속 연구되어야 할 것이다. 그러나 원래의 최소 자승법을 deterministic 시스템에 적용하여 제어 목적을 달성할 수 있으므로[4] 만일 확률시스템이 불안정하게 되면 입출력 신호가 전반적으로 증가하여 잡음의 영향이 상대적으로 감소되므로 deterministic 시스템으로 간주될 수 있을 것이므로 여기에서 제기된 것과 같은 불안정한 현상은 일어나지 않을 것으로 추측된다.

4. Simulation Examples

지면 관계로 생략

REFERENCES

[1] I.D.Landau; Near supermartingales for convergence analysis of recursive identification and adaptive control schemes, Int. J. Control, vol. 35, no. 2, pp.197-226, 1982.

[2] K.S.Sin and G.C.Goodwin; Stochastic adaptive control using a modified least squares algorithm, Automatica, vol. 18, no. 3, pp.315-321, 1982.

[3] R.Kumar and J.B.Moore; Convergence of adaptive minimum variance algorithms via weighting coefficient selection, IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-27, no. 1, pp.146-153, 1982.

[4] G.C.Goodwin, P.J.Ramadge and P.E.Caines; Discrete time multivariable control, IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-25, pp.449-456, 1980.