WALSH 함수에 의한 선형시변계에의 최적접근 기법에 관한 연구

Optimum approach to linear time-varying system by Walsh functions.

안 두 수 성균관대학교 공과대학 전기공학과 교수
심 재 선 성균관대학교 대학원 전기공학과
최 용 호* 성균관대학교 대학원 전기공학과

1. 서 론

선형계의 최적제어에 있어 feedback gain 은 시간에 대해 변동하므로 연산에 난점이 있다. KLEINMAN 은 부최적제어 근사법을 사용해 piecewize constant feedback gain 을 구하는 방법을 제안하였다.(1),(2)

한편, C.F.CHEN 과 HSIAO 는 WALSH 함수를 사용해 시불변계의 piecewize constant gain 을 더욱 간편하게 구했고,(3),(4) 이후 W.L. CHEN 과 SHIN 은 WALSH 영역에서 시변계의 해석을 처음으로 시도하였다.(5)

W.L. CHEN 과 SHIH 에 의해 도입된 product matrix, coefficient matrix 는 시변계의 해석에 극히 유용하기는 하나 product matrix 특유의 성질 때문에 WALSH 계수를 손쉽게 구할 수는 없었다. 또한 시변계의 feedback gain 을 구하는 W.L. CHEN 과 SHIN 의 방법은 KLEINMAN 의 방법보다 간단하기는 하나 많은 연립 선형행렬 대수 방정식의 해가 필요하므로 계산상에 큰 노력이 든다.

따라서 본 연구에서는 KRONECKER product(6) 및 partitioned product method 를 시변계 해석에 도입하여 computer 에 의한 WALSH 계수 결정을 가능하게 하려고 한다. 또한 product matrix 를 확장하여 단일행렬대수 방정식에서 feedback gain 을 구하고자 한다.

2. 본 론

1) OPERATIONAL MATRIX

구간 $(0,1]$ 에서 적분 가능한 임의의 함수 $f(t)$ 는 WALSH 급수로 전개된다.

$$f(t) = C_0\phi_0 + C_1\phi_1 + \cdots + C_n\phi_n + \cdots \tag{1}$$

WALSH 함수는 구간 $(0,1]$ 에서 orthonormal 한 계를 형성하므로

$$\int_0^1 \phi_m(t)\phi_n(t)dt = 0 \quad (m \neq n) \tag{2-1}$$

$$\int_0^1 \phi_m(t)\phi_n(t)dt = 1 \quad (m = n) \tag{2-2}$$

식 (1) 의 양변에 $\phi n(t)$ 를 곱하고 0 에서 1 까지 적분하면 식 (2) 에 의해서

$$C_n = \int_0^1 \phi_n(t)\cdot f(t)dt \quad (n=0,1,2,\cdots) \tag{3}$$

이때 Cn 은 제곱평균 오차가 최소일때 즉,

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^1 \left|f(t) - \sum_{n=0}^{N} C_n\phi_n(t)\right|^2 dt = 0 \tag{4}$$

일때 결정되는 것이 바람직 하다.

$$f(t) = \int_0^t \phi_i(t')dt' \quad (i=0,1,2,\cdots) \tag{5-1}$$

을 식 (1) 에 넣으면

WALSH operational matrix P 가 유도된다.

$$\int_0^t \phi_{(m)}(t')dt' = P_{(m\times m)}\phi_{(m)}(t),\ 0\leq t<1 \tag{5-2}$$

한편 quadratic performance index 에 의한 선형시불변계의 최적제어에 나타나는 상태천이

행렬을 해석하기 위해서는 backward integration 이 필요하다.

$$f(t)=\int_1^t \phi_i(t')dt' \quad (i=0,1,2,\cdots) \qquad (6\text{-}1)$$

을 식 (1)에 넣으면

backward operational matrix Q 가 유도된다.

$$\int_1^t \phi_{(m)}(t')dt' = Q_{(m\times m)}(t)\,\phi_{(m)}(t),\ 0<t<1 \qquad (6\text{-}2)$$

2) PRODUCT and COEFFICIENT MATRICES

WALSH vector 와 그 전치 vector 의 곱은 product matrix 라 한다.

$$\Phi_{(m\times m)}(t) = \phi_{(m)}(t)\cdot\phi_{(m)}^T(t) \qquad (7)$$

coefficient vector 와 그 전치 vector 의 곱은 coefficient matrix 라 한다.

$$C_{(m\times m)}(t) = C_{(m)}\cdot C_{(m)}^T \qquad (8)$$

여기서

$$\phi^T = [\phi_0, \phi_1, \phi_2, \cdots \phi_m] \qquad (9\text{-}1)$$

$$C^T = [C_0, C_1, C_2, \cdots C_m] \qquad (9\text{-}2)$$

식 (7), (8), (9)에 의해서

$$\Phi_{(m\times m)}(t)\cdot C_{(m)} = C_{(m\times m)}\cdot\phi_{(m)}(t) \qquad (10)$$

이 성립함을 알 수 있다.

3) 선형 시변계의 해석

선형시변계의 상태 방정식이 식 (11)과 같다면

$$\dot{X}(t)=A(t)\cdot X(t)+B(t)\cdot U(t) \quad , \ X(0)=X_0 \qquad (11)$$

식 (1)을 사용해서

$$A(t)=a^T\phi(t) \qquad (12)$$

$$B(t)=b^T\phi(t) \qquad (13)$$

$$X(t)=h^T\phi(t) \qquad (14)$$

$$U(t)=g^T\phi(t) \qquad (15)$$

식 (11)을 0에서 1까지 적분하면

$$X(t)-X(0)=\int_0^t A(t')X(t')dt'+\int_0^t B(t')U(t')dt' \qquad (16)$$

식 (16)에 식 (12),(13),(14),(15)를 대입하면

$$h^T\phi(t)-X_0\phi(t)$$
$$=\int_0^t a^T\phi(t')h^T\phi(t')dt'+\int_0^t b^T\phi(t')g^T\phi(t')dt' \qquad (17)$$

여기서 $C^T\phi(t)=\phi^T(t)C$ (18)

이므로

$$h^T\phi(t)-X_0\phi(t)$$
$$=\int_0^t a^T\phi(t')\phi^T(t')h\,dt'+\int_0^t b^T\phi(t')\phi^T(t')g\,dt' \qquad (19)$$

식 (7),(8),(10)을 식 (19)에 대입하면

$$h^T\phi(t)-X_0\phi(t)$$
$$=\int_0^t a^T H\phi(t')dt'+\int_0^t b^T G\phi(t')dt' \qquad (20)$$

식 (6-1)을 식 (20)에 대입하여 정리하면

$$h^T=a^T HP+k^T \qquad (21\text{-}1)$$

여기서

$$k^T=b^T GP+X_0 \qquad (21\text{-}2)$$

식 (21-1)에 KRONECKER product 를 도입하면

$$h=(a^T\otimes P^T)H^M+k \qquad (22\text{-}1)$$

여기서 Hi (i=0,1,2,....) 가 H 의 열 vector 일때

$$H^M \triangleq [H_0, H_1, H_2, \cdots]^T \qquad (22\text{-}2)$$

이다.

WALSH series 를 제 8항까지 전개시켰을 경우 h 의 dimension 은 (8×1)이고 H^M 의 dimension 은 (64×1)이다.

따라서 식 (22-1)의 직접적인 연산은 불가능하다.

본 연구에서는 식 (22-1)을 그 연산 과정에 착안하여 partitioned product method 를 도입하면 식 (22-1)는

$$h=C.\,h+K \qquad (23)$$

으로 간략화 된다.

식 (23)에서 h를 구하면

식 (14)에 의해 상태변수 X(t) 를 구하게 된다.

4) 선형 시변계 해석의 NUMERICAL EXAMPLE

$\dot{X}(t) = t\,X(t) + U(t)$, $X(0) = 1$

의 계를 예로 들어 보자.

입력 U(t) 로는 unit ramp function 을 사용한다.

이때,

$$a^T = [\tfrac{1}{2} \quad -\tfrac{1}{4} \quad -\tfrac{1}{8} \quad 0 \quad -\tfrac{1}{16} \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$
$$b^T = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$
$$g^T = [\tfrac{1}{2} \quad -\tfrac{1}{4} \quad -\tfrac{1}{8} \quad 0 \quad -\tfrac{1}{16} \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$
$$X_0 = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

식 (23)에 의한 h 값은

```
H( 1, 1)= 1.3943968
H( 2, 1)=-0.3048211
H( 3, 1)=-0.16013913
H( 4, 1)= 0.094341021
H( 5, 1)=-0.081155831
H( 6, 1)= 0.047862109
H( 7, 1)= 0.025283414
H( 8, 1)=-.78624584E-02
```

따라서

$$X(t) = 1.3943968\phi_0 - 0.3048211\phi_1 - 0.16013913\phi_2 + 0.094341021\phi_3 - 0.081155831\phi_4 + 0.047862109\phi_5 + 0.025283414\phi_6 - 0.0078624584\phi_7$$

한편, 이 계의 산술적인 해는

$$X(t) = 2 \cdot e^{\frac{t^2}{2}} - 1$$

이다.

이 두 해를 비교하여 보면

0	1
0.05	1.0025016
0.1	1.010025
0.15	1.022627
0.2	1.0404027
0.25	1.0634868
0.3	1.0920557
0.35	1.1263293
0.4	1.1665741
0.45	1.2131065
0.5	1.2662969
0.55	1.3265749
0.6	1.3944347
0.65	1.4704422
0.7	1.5552426
0.75	1.6495695
0.8	1.7542555
0.85	1.8702444
0.9	1.998605
0.95	2.1405476
1	2.2974425

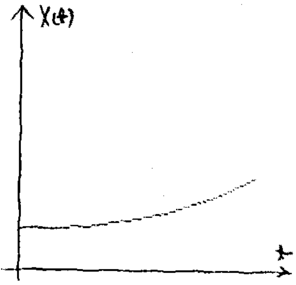


그림 1. 예로든 계의 산술적인 결과

```
X( 1) = 1.0079066
X( 2) = 1.0396522
X( 3) = 1.1046609
X( 4) = 1.2060903
X( 5) = 1.3488675
X( 6) = 1.5406116
X( 7) = 1.791536
X( 8) = 2.1158637
```

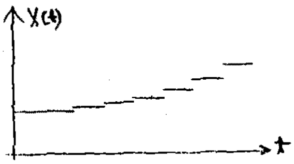


그림 2. WALSH 함수 접근에 의한결과

5) AN OPTIMAL CONTROL PROBLEM

상태방정식이 식 (11)로 표시되는 선형시변계의 quadratic performance index 에 의한 제어에서

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{t_f} [x^T(t)S(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)]\,dt \tag{24}$$

여기서 $S(t)$는 positive semi-definite matrix 이고 $R(t)$ 는 positive definite matrix 이다.

ATHANS 와 FALB 에 의하면 최적제어 vector

$$u(t) = R^{-1}(t) \cdot B^T \cdot P(t) \tag{25}$$

이다.

$$F(t) = \begin{bmatrix} A(t) & B(t)R^{-1}(t)B^T(t) \\ S(t) & -A^T(t) \end{bmatrix} \tag{26}$$

일때 adjoint variable $p(t)$는 다음과 같은 canonical 방정식을 만족한다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{p}(t) \end{bmatrix} = F(t)\begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix}, \quad x(0) = x_0, \quad p(t_f) = 0 \tag{27}$$

$\lambda(t_f, t)$ 가 식 (27)의 상태천이 행렬이라면

$$\lambda(t_f, t) = -\lambda(t_f, t)F(t), \quad \lambda(t_f, t_f) = I \tag{28}$$

$\lambda(t_f, t)$ 를 decompose 하면

$$\lambda(t_f, t) = \begin{bmatrix} \lambda_{11}(t_f, t) & \lambda_{12}(t_f, t) \\ \lambda_{21}(t_f, t) & \lambda_{22}(t_f, t) \end{bmatrix} \tag{29}$$

그러면

$$\begin{bmatrix} x(t_f) \\ p(t_f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11}(t_f, t) & \lambda_{12}(t_f, t) \\ \lambda_{21}(t_f, t) & \lambda_{22}(t_f, t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix} \tag{30}$$

식 (27)을 식 (30)에 대입하면

$$p(t) = -\lambda_{22}^{-1}(t_f, t) \cdot \lambda_{21}(t_f, t)\, x(t) \tag{31}$$

$$u(t) = -K(t)\, x(t) \tag{32}$$

여기서 $K(t)$ 는 time-varying gain 으로

$$K(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)\lambda_{22}^{-1}(t_f, t) \cdot \lambda_{21}(t_f, t) \tag{33}$$

식 (33)에서 상태천이 행렬을 구하면 $K(t)$ 가 결정됨을 알 수 있다.

식 (28)을 t_f 에서 t 까지 역행적분하면

$$\lambda(t_f, t) - I = -\int_{t_f}^{t} \lambda(t_f, t') \cdot F(t')\,dt' \tag{34}$$

$t_f = 1$ 로 하면 식 (1)에 의해 식 (34)는 partitioned product method 에 의해

$$\begin{bmatrix} n_{11}^T & n_{12}^T \\ n_{21}^T & n_{22}^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \phi & 0 \\ 0 & \phi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10000000 & 00000000 \\ 00000000 & 10000000 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \phi & 0 \\ 0 & \phi \end{bmatrix}$$

$$= -\int_{t_f}^{t} \begin{bmatrix} n_{11}^T & n_{12}^T \\ n_{21}^T & n_{22}^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \phi & 0 \\ 0 & \phi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_{11}^T & f_{12}^T \\ f_{21}^T & f_{22}^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \phi & 0 \\ 0 & \phi \end{bmatrix} dt' \quad (35)$$

식 (35)에 product matrix 와 coefficient matrix 를 확장하여 적용하면

$$\begin{bmatrix} n_{11}^T & n_{12}^T \\ n_{21}^T & n_{22}^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \phi & 0 \\ 0 & \phi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10000000 & 00000000 \\ 00000000 & 10000000 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \phi & 0 \\ 0 & \phi \end{bmatrix}$$

$$= -\int_{t_f}^{t} \begin{bmatrix} n_{11}^T & n_{12}^T \\ n_{21}^T & n_{22}^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \phi & 0 \\ 0 & \phi \end{bmatrix} dt' \quad (36)$$

식 (36)에 식 (6-2)를 적용하여 정리하면

$$\begin{bmatrix} n_{11}^T & n_{12}^T \\ n_{21}^T & n_{22}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10000000 & 00000000 \\ 00000000 & 10000000 \end{bmatrix}\left(I + \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \right)^{-1} \quad (37)$$

이 됨을 알 수 있다.

6) NUMERICAL EXAMPLE OF OPTIMAL CONTROL

$\dot{X}(t) = tX(t) + U(t), \quad X(0)=1$

로 표시되는 선형시변계를 생각한다.

Quadratic performance index

$$J = \frac{1}{2}\int_0^1 [X^2(t') + U^2(t')]\,dt'$$

식 (24), (26)에 의해

$$F(t) = \begin{bmatrix} t & 1 \\ 1 & -t \end{bmatrix}$$

이때,

$$f_{11}^T = [\tfrac{1}{2} \;\; -\tfrac{1}{4} \;\; -\tfrac{1}{8} \;\; 0 \;\; -\tfrac{1}{16} \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0]$$
$$f_{12}^T = [1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0]$$
$$f_{21}^T = [1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0]$$
$$f_{22}^T = [-\tfrac{1}{2} \;\; \tfrac{1}{4} \;\; \tfrac{1}{8} \;\; 0 \;\; \tfrac{1}{16} \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0]$$

식 (37)에 의한 n_{21}, n_{22} 값은

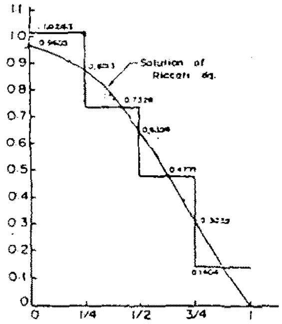
$[n_{21}]$

```
M1( 9, 1)= 0.51947353
M1( 9, 2)= 0.26466563
M1( 9, 3)= 0.13198857
M1( 9, 4)= .34588049E-02
M1( 9, 5)= 0.06598555
M1( 9, 6)= .16658767E-02
M1( 9, 7)= .70510978E-03
M1( 9, 8)=-.29853403E-03
```

$[n_{22}]$

```
M1( 9, 9)= 0.88282111
M1( 9, 10)= 0.024726066
M1( 9, 11)= 0.011130432
M1( 9, 12)= 0.059555741
M1( 9, 13)= .53732264E-02
M1( 9, 14)= 0.030146029
M1( 9, 15)= 0.015790741
M1( 9, 16)=-.12828674E-02
```

식 (32)에 의해



Comparison of Walsh series solution and solution of Riccati equation.

그림 3. W.L. CHEN 의 결과

```
X( 1)= 0.96050055
X( 2)= 0.91739178
X( 3)= 0.83454937
X( 4)= 0.71268913
X( 5)= 0.55944848
X( 6)= 0.38907103
X( 7)= 0.21926691
X( 8)= 0.06639027
```

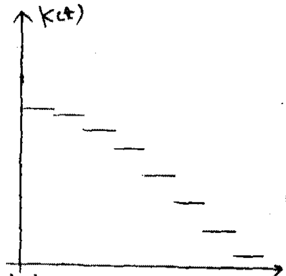


그림 4. 본 연구의 결과

3. 결 론

W.L. CHEN 과 SHIH 에 의한 WALSH 영역에서의 시변계의 해석은 coefficient matrix 와 product matrix 의 연산에 커다란 문제점이 있다.

본 연구에서는 서론에 제시한 방법을 사용해 식 (23)을 유도하였다. 식 (23)은 WALSH 계수 결정에 극히 편리함을 볼 수 있다.

WALSH 함수는 임의의 세부구간에서 original function 의 평균값을 갖는다.

서론에서 밝힌바와 같이 본 연구에서는 선형행렬 대수 방정식이 또 다시 연립 방정식을 형성하여

round-off error 를 유발시켰을 것으로 추정하였다. 따라서 본 연구에서는 식 (37)로 시변계의 최적제어에서의 feedback gain 을 구하여 보았으며, 그림3을 그림4 와 비교 추정하여 보면 본연구의 접근 방법이 극히 간편하면서도 정확함을 알 수 있다.

따라서, 본 연구가 시변계의 접근에 기여할 것으로 믿는다.

Reference

(1) D. KLEINMAN and M. ATHANS
The design of suboptimal linear time-varying systems
IEEE, Trans. Auto. Control, 1968, AC-13

(2) D.L. KLEINMAN, T. FORTMANN and M. ATHANS
On the design of linear systems with piecewise constant feedback gains
IEEE Trans. Auto. Control, 1968, AC-13

(3) C.F. CHEN and C.H. HSIAO
Design of piecewise constant gains for optimal control via Walsh functions
IEEE, Trans. Auto. Control, 1974, AC-20

(4) C.F. CHEN and C.H. HSIAO
Walsh series analysis in optimal control
INT. J. Control, 1975, Vol. 21, No. 6

(5) W.L. CHEN and Y.P. SHIH
Analysis and optimal control of time-varying linear systems via Walsh functions
INT. J. Control, 1978, Vol. 27, No. 6

(6) J.W. BREWER
Kronecker products and matrix calculus in system theory
IEEE, Trans. Circuit and System, 1978, CAS-25