대한전기학회 1984년도 하계학술회의 논문집 1984년 7월 20일

TIME-OPTIMAL CONTROL SYSTEM 해석을 위한 WALSH SERIES APPROACH 에 관한 연구

A study on Walsh series approach for analysis of time-optimal control systems

안 두 수 성균관대학교 전기공학과
이 명 규 "
이 외 희* "

1. 서 론

WALSH 함수는 계의 합성과 해석에 널리 적용되고 있다.

WALSH 함수는 [0,1) 에서 정의 되며 또한 함수값은 세부구간에서의 평균값을 취한다.[1,6]

W. L. CHEN 과 Y.P. SHIH 는 역행적분에 의한 OPERATIONAL MAT.를 유도함으로써 (-1,0) 인 구간에서도 WALSH 함수 해석이 가능함을 보였다.[2] WALSH 함수 정의 구간인 (-1,0), (0,1) 이외의 구간에서 WALSH 함수가 정의 되기위해서는 각 구간에서 함수의 초기값을 알아야 한다. 그러나 WALSH 함수값은 세부 구간에서 평균값을 취하기 때문에 초기값 선정에 어려운 점이 있다.

본 연구에서는 TIME-OPTIMAL CONTROL SY.의 해석에 WALSH SERIES 가 어떻게 적용되며, 매 구간마다 초기값 선정의 문제점이 어떻게 보완될 수 있는가를 보이고자 한다.

2. 본 론

(1) TIME-OPTIMAL CONTROL

다음과 같이 표시되는 계를 고려하자.

$$\dot{X} = AX + Bu \tag{1}$$

$$|u| \le 1 \tag{2}$$

$$J = \int_{t_0}^{t_f} 1\, dt = t_f - t_0 \tag{3}$$

TIME-OPTIMAL CONTROL PROBLEM 은 최단시간내에 초기값 X_0 로 부터 주어진 최종값 X_f 로 계를 천이시키는 입력을 구하는 것이다.

이미 잘 알려진 바와 같이 최적해인 U^* 는 PONTRYGIN 의 최대원리이론에 의해 다음과 같다.[3]

$$H = 1 + \langle P, AX \rangle + \langle P, Bu \rangle \tag{4}$$

$$\dot{X} = \frac{\partial H}{\partial P} \tag{5}$$

$$\dot{P} = -\frac{\partial H}{\partial P} \tag{6}$$

$$u^* = -SGN\{B^T P\} \equiv \Delta = \pm 1 \tag{7}$$

(2) WALSH SERIES APPROACH

식(1)은 식(7)에의해 다음과 같다.

$$\dot{X}(t) = AX(t) + B\Delta \tag{8}$$

$$X(0) = X_0 \tag{9}$$

이때 X 는 [0,1) 인 구간에서 다음과 같은 과정으로 WALSH 함수에 의해 구해진다.

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \vdots \\ \dot{X}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{10} & C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1(m-1)} \\ C_{20} & C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2(m-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n0} & C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{n(m-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_{m-1} \end{bmatrix} \tag{10}$$

위 식을

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} C_1^T \\ C_2^T \\ \vdots \\ C_n^T \end{bmatrix} \phi \triangleq C_{(n \times m)} \phi_{(m)} \tag{11}$$

라고 놓자.

위 식을 적분하면 다음과 같이 된다.

$$\mathbb{X} = \mathbb{C}\mathbb{P}\phi + \mathbb{X}_0 \tag{12}$$

$$\int_0^t \phi(\lambda)\,d\lambda = P\phi \tag{13}$$

$B\Delta$ 는 WALSH SERIES에 의해 VECTOR 형태로 표시 된다.

$$\begin{aligned} B\Delta &= \mathbb{B}\Delta\phi_0 \\ &= [B\Delta, 0_{(2)} \cdots\cdots 0_{(m-1)}]\phi \\ &\triangleq \mathbb{H}\phi \end{aligned} \tag{14}$$

식(10)~(14)을 식(8)에 대입하면 다음과 같다.

$$\mathbb{C}\phi = \mathbb{A}\{\mathbb{C}P\phi + \mathbb{X}_0\} + \mathbb{H}\phi \tag{15}$$

또한 AXo 도 VECTOR 형태로 표시된다.

$$\begin{aligned} AX_0 &= \mathbb{A}\mathbb{X}_0\phi_0 \\ &= \mathbb{G}\phi \end{aligned} \tag{16}$$

따라서 식(15)은 다음과 같다.

$$\mathbb{C} = \mathbb{A}\mathbb{C}P + \mathbb{K} \quad \text{단, } \mathbb{G} + \mathbb{H} = \mathbb{K} \tag{17}$$

즉

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} = \left[\mathbb{I} - P^T \otimes \mathbb{A}\right]^{-1} \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ \vdots \\ K_n \end{pmatrix} \tag{18}$$

그러므로 X는 식(12)에 의해 쉽게 결정된다.

(3) BOUNDARY CONDITION

어떤 함수 f(t) 가 WALSH 함수 에의해 그림 1 로 표시된다고 하자.

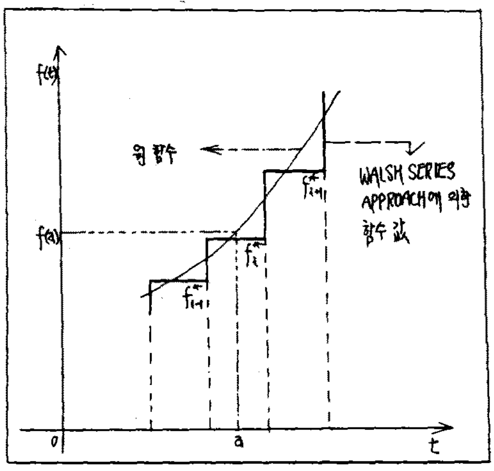

그림 1 함수f(t) 의 WALSH SERIES APPROACH

그림 1 에서와 같이 WALSH SERIES 에 의한 함수값은 각각의 세부 구간에서 원함수의 평균값을 취하기 때문에 다음 구간의 초기값 선정이 어렵다. 산술평균이나 기하학적인 평균에 의한 방법은 오차가 크다. WALSH SERIES 의 8항까지 고려할 때, 다음의 방법으로 오차를 크게 줄일 수 있다.

f(a) 를 다음 구간의 초기값으로 다음과 같다고 하자.

$$f(a) = f_i^* + \frac{1-k}{M} \tag{19}$$

$$\text{단, } k = \frac{f_{i+1}^* - f_i^*}{f_i^* - f_{i-1}^*}$$

여기서 M은 다음 식으로 주어진다.

$$M \triangleq \frac{290}{1-S} \tag{20}$$

$$\text{단, } S = 1 - (f_i^* \text{ 주위의}) \text{ 변화율}$$

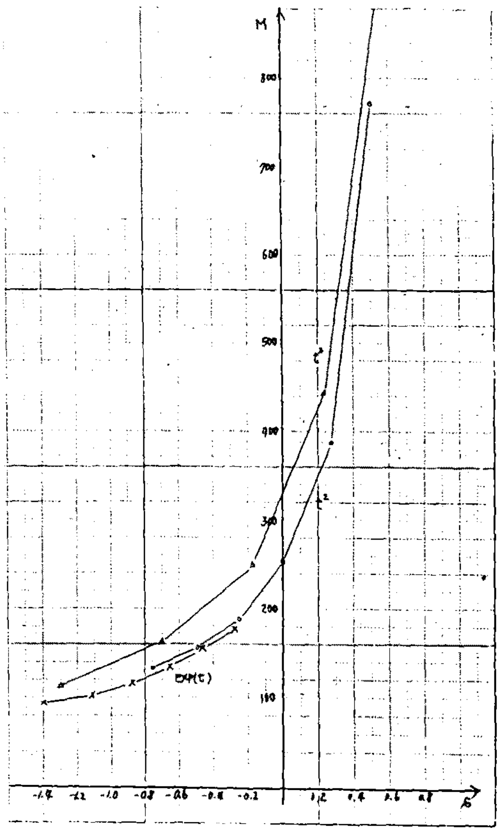

그림 2 실제의 M 값

그림2 는 이미 알고 있는 함수에 대한 S와 m 의관계를 보여주고 있으며, 이들의 관계는 식 (20) 에 접근하고 있음을 알수 있다.
그림 상에 표시된 점들은 WALSH SERIES 를 8항 까지 전개시켰을 때 원함수 와의 오차를 0 으로 하는 점들이다.

3. 결 론

이상에서와 같이, 본 연구에서는 TIME-OPTIMAL CONTROL SYSTEM 의 해석을 위한 WALSH SERIES의 적용에 대하여 고찰하였으며, 각 구간에서의 초기값을 선정하는 방법을 제안 하였다.

본 연구에서의 방법에 의하면 기존의 방법으로 보다도 원함수에 대한 오차를 크게 줄일 수 있음을 알 수 있었다.

REFFERENCE

1. C.F.CHEN & C.H.HSIAO,"WALSH SERIES ANALYSIS IN OPTIMAL CONTROL",INT.J.CONTROL V-21 NO.6,1975, 881 - 897
2. W.L.CHEN & Y.P.SHIH,"ANALYSIS AND OPTIMAL CONTROL OF TIME-VARYING LINEAR SYSTEMS VIA WALSH FUNCTION",INT.J.CONTROL, 1978, V-27 NO.6,917-932
3. L.S.PONTRYGIN,"MATHMATICAL THEORY OF OPTIMAL PROCESS",NEW-YORK,WILEY,1962
4. G.RAO, K.R.PALANISAMY & T.SRINIDASAN,"EXTENTION OF COMPUTATION BEYOND THE LIMIT OF INITIAL NORMAL INTERVAL IN WALSH SERIES ANALYSIS OF DYNAMICAL SYSTEMS",IEEE TRANS. AC-25,NO.2,1980
5. K.G.BEAUCHAMP,"WALSH FUNCTIONS AND THEIR APPLICATIONS",ACADEMIC PRESS, 1975
6. C.F.CHEN & C.H.HSIAO,"TIME-DOMAIN SYNTHESIS VIA WALSH FUNCTIONS",PROC.IEEE V-122, NO.5 MAY 1975