PD 출력 궤환에 의한 선형 다변수 시스템의 극점배치

Pole placement in linear multivariable systems using proportional-derivative output feedback

한 만 춘 연세대학고 공과대학 전기공학과 교수

고 재 원* 연세대학고 대학원 전기공학과

1. 서 론

선형 다변수 제어계통의 극점배치 방법에는 상수 이득 궤환과 동특성 보상기를 이용하는 2 가지 방법이 있으며, 또한 이들은 상태궤환과 출력궤환을 이용하는 방법으로 각각 나뉘어진다.[1)~6)]

그러나 상수 이득 상태궤환을 이용한 극점배치 방법은 모든 상태변수를 측정하는데 많은 어려움이 있고, 상수 이득 출력궤환을 이용하는 방법은 max(m,l) 개의 극점밖에 배치할수 없어서 종속 극점이 문제로 된다.[3)]

또한 동특성 보상기를 이용한 극점배치 방법은 시스템의 차수를 증가시켜 추가 극점을 가져올 뿐 아니라 복잡한 실현 과정이 요구되어 실제 실행에 있어서 어려움이 많다.[4),7)]

따라서 본 논문에서는 시스템의 차수를 증가시키지 않고 극점배치를 위한 더 많은 매개변수를 제공하는 PD 출력궤환을 실현하고자 한다.

PD 출력궤환을 이용한 극점배치 방법은 1977 년에 Seraji와Tarokh[7)] 가 처음으로 단위 랭크 PD 출력궤환 행렬을 이용하여 m 입력, ℓ 출력 시스템의 max(2m,2l)극점을 배치하는 방법을 제시하였는데, 본 논문에서는 위의 방법을 개선하여 랭크 2 의 비례 궤환 행렬과 단위 랭크 미분 궤환 행렬을 이용하여 폐루우프 시스템의 극점 중 max(2ℓ+m-1 ,2m+ℓ-1) 의 극점을 배치하기 위한 방법을 제시한다.

2. 본 론

2.1 다변수 시스템을 위한 PD 출력궤환의 설계

다음과 같은 가제어, 가관측하고 싸이클릭한 선형 다변수 시스템을 생각하자.

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t)$$
$$y(t) = C\,x(t) \qquad (1)$$

위의 시스템에 PD 출력궤환을 적용하면 폐루우프 시스템의 상태 방정식은 다음과 같다.

$$\dot{x}(t) = (I+BQC)^{-1}(A-BPC)x(t) + (I+BQC)^{-1}Bv(t) \qquad (2)$$

식(2)로부터 폐루우프 시스템은 원래의 시스템과 같이 차수가 n이다. 따라서 미분 요소는 시스템에 새로운 극점을 가져오지 않는다.

여기서 폐루우프 시스템의 극점 즉, $\hat{A}=(I+BQC)^{-1}(A-BPC)$ 의 고유치를 복소 평면에서 임의로 지정된 위치로 배치시키는 궤환 행렬 P와 Q를 결정하기 위한 2 가지 방법을 제시한다.

(1) 제 1 방법

제 1단계에서 (m-1) 극점을 배치하고, 제 2단계에서 다변수 시스템을 단일 입력 시스템으로 유도함으로써 배치된 극점이 보존되며, PD 출력궤환에 의하여 추가 극점을 배치한다.

1) 제 1단계

$m \times \ell$ 단위 랭크 비례 출력궤환 행렬 $P_1 = k_1 p_1$ 을 시스템(A, B, C) 에 적용하면 폐루우프 특성 다항식은 다음과 같이 된다.

$$H_1(s) = H_0(s) + p_1 W_0(s) k_1 \qquad (3)$$

여기서 $W_0(s) = C\,adj(sI-A)B$, $H_0(s) = |sI-A|$ $1 \times \ell$ 벡터 p_1 은 (A, $p_1 C$) 가 가관측하도록

임의로 주어지고, $m \times 1$ 벡터 k_1은 다음의 ($m-1$) 선형 방정식으로부터 구할 수 있다.

$$H_0(\lambda_i)+p_1W_0(\lambda_i)k = 0 \qquad i=1, \cdots, m-1 \quad (4)$$

폐루우프 시스템(A_1, B, C)는 $\lambda_1, \cdots, \lambda_{m-1}$에 ($m-1$)개의 극점을 갖는다. 여기서 $A_1=A-BP_1C$.

2) 제 2 단계

$m \times \ell$ 단위 랭크 PD 출력궤환 행렬 $P_2=kp_2, Q=kq$를 시스템(A_1, B, C)에 적용한다. 여기서 k, p_2, q는 각각 $m \times 1, 1 \times \ell, 1 \times \ell$ 벡터이다. 이 단위 랭크 궤환 행렬은 시스템(A_1, B, C)를 궤환 벡터 p_2와 q를 갖는 단일 입력 시스템(A_1, Bk, C)로 유도하고, 폐루우프 특성 다항식은 다음과 같이 된다.

$$H_2(s)=\frac{1}{1+qCBk}\left[H_1(s)+p_2W_1(s)k+ s\,q\,W_1(s)k\right] \quad (5)$$

여기서 $W_1(s)=C\,\mathrm{adj}(sI-A_1)B$, $H_1(s)=|sI-A_1|$.
ν_1개의 추가 극점들을 원하는 곳 $\lambda_m, \cdots, \lambda_{m+\nu_1-1}$에 배치하는 벡터 p_2와 q는 다음의 ν_1개의 선형 방정식으로부터 구할 수 있다.

$$H_1(\lambda_i)+p_2W_1(\lambda_i)k+\lambda_i q W_1(\lambda_i)k=0 \qquad i=m, \cdots, m+\nu_1-1 \quad (6)$$

결과적으로 랭크 2의 비례 궤환 행렬 $P=P_1+P_2$와 단위 랭크 미분 궤환 행렬 $Q=kq$는 시스템(A, B, C)의 $\rho_1=2\ell+m-1$극점을 지정된 위치에 배치한다.

(2) 제 2 방법

제1단계에서 ($\ell-1$)극점을 배치하고, 제 2단계에서 다변수 시스템을 단일출력 시스템으로 유도함으로써 배치된 극점이 보존되며, PD출력궤환에 의하여 추가 극점을 배치한다.

1) 제 1 단계

$m \times \ell$ 단위 랭크 비례 출력궤환 행렬 $P_1=k_1p_1$을 시스템(A, B, C)에 적용한다. 여기서 $m \times 1$ 벡터 k_1은 (A, Bk_1)이 가제어 하도록 임의로 주어지고, $1 \times \ell$ 벡터 p_1은 다음의 ($\ell-1$) 선형 방정식으로부터 구할 수 있다.

$$H_0(\lambda_i)+p_1W_0(\lambda_i)k_1=0 \qquad i=1, \cdots, \ell-1 \quad (7)$$

폐루우프 시스템 ($A-BP_1C, B, C$)은 $\lambda_1, \cdots \lambda_{\ell-1}$에 ($\ell-1$)개의 극점을 갖는다.

2) 제 2 단계

$m \times \ell$ 단위 랭크 PD 출력궤환 행렬 $P_2=p_2k$, $Q=qk$를 시스템(A_1, B, C)에 적용한다.

여기서 k, p_2, q는 각각 $1 \times \ell, m \times 1, m \times 1$ 벡터이다. 이 단위 랭크 궤환 행렬은 시스템(A_1, B, C)가 궤환 벡터 p_2와 q를 갖는 단일 출력 시스템(A_1, B, kC)로 유도하고, 다음의 폐루우프 특성 다항식을 얻는다.

$$H_2(s)=\frac{1}{1+kCBq}\left[H_1(s)+kW_1(s)p_2+skW_1(s)q\right] \quad (8)$$

여기서 $W_1(s)=C\,\mathrm{adj}(sI-A_1)B$, $H_1(s)=|sI-A_1|$
ν_2개의 추가 극점을 지정된 위치 $\lambda_1, \cdots, \lambda_{\ell+\nu_2-1}$에 배치하는 벡터 p_2와 q는 다음의 ν_2개의 선형 방정식으로부터 구할 수 있다.

$$H_1(\lambda_i)+kW_1(\lambda_i)p_2+\lambda_i kW_1(\lambda_i)q=0 \qquad i=\ell, \cdots, \ell+\nu_2-1 \quad (9)$$

결과적으로 랭크 2의 비례 궤환 행렬 $P=P_1+P_2$와 단위 랭크 미분 궤환 $Q=qk$는 시스템(A, B, C)의 $\rho_2=2m+\ell-1$개의 극점을 미리 지정된 위치에 배치한다.

2.2 컴퓨터 해석 및 결과고찰

(1) 다변수 시스템의 선정

다음의 조건 i)과 ii)를 만족하는 임의의 플랜트 4개를 표1과 같이 선정하여 전산처리 한다.

i) 시스템(C, A, B)는 제어가능하고 관측가능하다.

ii) 시스템 행렬 A는 싸이클릭하다.

표1. 선정한 플랜트의 매개변수

Table 1. Parameters of Plants

	Plant 1	Plant 2	Plant 3	Plant 4
	$n=3, m=1, \ell=2$	$n=3, m=2, \ell=2$	$n=4, m=2, \ell=2$	$n=5, m=2, \ell=2$
A	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \\ 8 & 2 & -7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
B	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
C	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(2) 컴퓨터 시뮬레이션

표1의 플랜트에 앞의 알고리즘을 적용하는데 있어서 미리 선정된 폐루우프 시스템의 고유치는 plant1과 plant2에서는 $-1, -1\pm j$, plant3에서는 $-1, -2, -5, -6$, plant4에서는 $-1, -2, -3, -1\pm j$이다.

1단계 비례 궤환 행렬 P_1과 1단계에서 배치된 극점을 전산처리하여 구한 결과는 표2와 같다. 표2에서 보는 바와 같이 모든 플

랜트에서 1 단계 비례 출력궤환 행렬 P_1에 의하여 $m-1$(혹은 $\ell-1=1$)개의 극점이 미리 지정된 위치에 정확하게 배치되었다.

표2. 1 단계에서 배치된 극점

Table 2. The Assigned Pole in the Stage-One

	배치된 극점 (1 단계)	
	Real Part	Imaginary Part
Plant 1	△ -1.00000E+00	0.00000E+00
	5.00000E-01	-8.66025E-01
	5.00000E-01	8.66025E-01
Plant 2	-3.00000E+00	0.00000E+00
	-3.49999E+00	0.00000E+00
	△ -9.99999E-01	0.00000E+00
Plant 3	2.00000E+00	0.00000E+00
	-4.00000E+00	0.00000E+00
	-3.00000E+00	0.00000E+00
	△ -1.00000E+00	0.00000E+00
Plant 4	-3.09016E-01	-9.51056E-01
	-3.09016E-01	9.51056E-01
	8.09016E-01	-5.87785E-01
	8.09016E-01	5.87785E-01
	△ -1.00000E+00	0.00000E+00

2단계 비례 궤환 행렬 P_2를 구한 다음, 랭크 2의 총 비례 궤환 행렬 $P=P_1+P_2$와 단위 랭크 미분 궤환 행렬 Q를 전산처리하여 구하면 표 3과 같다.

표3. 총 PD 출력궤환 행렬

Table 3. Total PD Output Feedback Matrices

	P	Q
Plant 1	$\begin{bmatrix} 1.400, 0.600 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.800, -0.800 \end{bmatrix}$
Plant 2	$\begin{bmatrix} 0.500, -44.190 \\ 1.333, -58.905 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -25.230, 1.000 \\ -33.63, 1.333 \end{bmatrix}$
Plant 3	$\begin{bmatrix} 20.000, 6.000 \\ 33.000, -9.000 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1.000, 1.000 \\ 1.500, -1.500 \end{bmatrix}$
Plant 4	$\begin{bmatrix} 1.600, 0.750 \\ 0.400, -0.750 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.950, 1.250 \\ -0.950, -1.250 \end{bmatrix}$

표3 의 PD 출력궤환 행렬 P 와 Q 에 의하여 전체 과정에서 배치된 극점을 전산처리하여 구하여 보면 모든 플랜트에서 미리 선정된 값에 정확하게 배치되었다는 것을 알 수 있다. 특히 PD 출력궤환은 주어진 시스템의 차수를 증가시키지 않고 극점배치를 위한 더 많은 매개변수를 제공하여 순수한 비례 출력 궤환에 비교해서 더 많은 극점을 배치할 수 있는 중요한 특징을 갖는다.

3. 결 론

본 논문에서는 PD 출력궤환을 이용하여 가제어, 가관측 선형 다변수 시스템의 $\max(2\ell+m-1, 2m+\ell-1)$ 극점을 임의로 원하는 곳에 배치할 수 있는 새로운 극점배치 방법을 제시하였으며, 이 방법을 임의로 선정한 플랜트에 적용하여 얻은 결론은 다음과 같다.

1) PD출력궤환은 시스템의 차수를 증가시키지 않고 극점배치를 위한 더 많은 매개변수를 제공한다.

2) 배치되는 극점의 수가 $\min(n, m+\ell-1)$이나[3] $\max(2m, 2\ell)$보다[7] 많은 $\max(2\ell+m-1, 2m+\ell-1)$이다.

3) 상태변수를 측정할 필요가 없다.

4) 주어진 시스템의 고유치를 알지 않고도 원하는 폐루우프 시스템의 고유치를 임의로 선정할 수 있다.

5) 극점배치를 위하여 요구되는 궤환 행렬은 선형 방정식으로부터 구할 수 있기 때문에 컴퓨터 계산 시간이 빠르다.

4. 참 고 문 헌

1) L.Gordon, J. David and S. Munir," A Pole Assignment Algorithm for Multivariable Control Systems", IEEE Trans. Automat. Contr. Vol. AC-24 PP.357-362, 1979

2) B. Sridhar & D.P. Lindorff, "A Note on Pole Assignment", IEEE Trans. Automat. Contr. Vol. AC-17, PP,922-923, 1972.

3) H. Kimura, "Pole Assignment by Gain Output Feedback", IEEE Trans. Automat. Contr. Vol. AC-20, PP.509-516,, 1975.

4) JR. F. M. Brasch & J.B. Pearson, "Pole Placement using Dynamic Compensators", IEEE Trans. Automat. Contr. Vol. AC-15, PP. 34-43, 1970.

5) R.V. Patel and H. Seraji, "A Note on Pole Placement using Dynamic Compensators", Int, J. Contr. Vol. 27, PP.653-655, 1978.

6) R. Ahmari & A.G. Vacroux, "Approximate Pole Placement in Linear Multivariable Systems using Dynamic Compensators", Int. J. Contr. Vol. 18, PP. 1329-1336. 1973.

7) H. Seraji & M.Tarokh, "Design of Proportional-plus-Derivative Output Feedback for Pole Assignment", Proc. IEE Vol. 124, PP.729-732, 1977.