

FIR 필터의 지수창 함수에 관한 연구

83325

○ 이 정 재 * 한 영 럽** 하 진 구***
* ** *** 한양대학교 공과대학 전자통신공학과

Exponential Window Function of FIR Filter

○ Jeong Jae LEE*, Young Yeul HAN**, Jin Gu HA***

* ** *** Dept. of Electronic Communication Engineering, Hanyang University.

ABSTRACT It is shown that the new window function of Exponential type can be derived from Cheby-chev Identity for the design of FIR filter, and the various kinds of windows which have different characteristics can also be made by changing the coefficients of them easily

1. 서 론

디지털 필터는 대별하여 FIR (Finite Impulse Response)필터와 IIR (Infinite Impulse Response) 필터로 대별되며 특히 FIR 필터는 시간지연이 임정한 이상적인 선형 위상 특성의 실현이 가능하나 무한히 계속되는 항을 적절히 유한한 길이로 재단 (Truncation)하지 않으면 실제적으로 설계할 수가 없다.

그러므로 이의 재단에 따른 오차 발생을 최소로 하고 적절히 재단 (Truncation) 하기 위한 방법으로 창 함수를 사용하는 문제가 대두되었다. 흔히 사용되는 창 함수로는 Rectangular 창 함수, Hamming 창 함수, Hanning 창 함수, Kaiser 창 함수, Larzen 창 함수 등이 있으며, 같은 구간을 재단하였 다 하더라도 창 함수의 특성에 따라 필터 특성이 달라진다. 본문에서는 Chebychev 항등식으로 부터 새로운 지수창 함수를 유도하고 계수 변화에 따라 특성을 달리하는 여러종류의 창 함수와 위에서 언급한 창 함수들과의 관계를 시간영역과 주파수 영역에서 고찰 하고 상호간의 특성을 비교 해 보인다.

2. 본 론

(1). 창 함수 (Window Function) 의 집합 신호 $f(t)$ 의 시간영역에서의 유한한 절편

$$f_{\tau}(t) = \begin{cases} f(t) & |t| < \tau \\ 0 & |t| > \tau \end{cases} \quad (1)$$

는 $|t| > \tau$ 에 대해서는 $F(W)$ 가 정확하게 결정 될 수 없으므로 $f_{\tau}(t)$ 의 푸리에 변환 $F_{\tau}(W)$ 를 $F(W)$ 의 계략값으로 사용할 경우 $F_{\tau}(W) - F(W)$ 라는 오차가 발생한다.

이를 줄이기 위해 창 함수 $W(t)$ 를 사용할 수 있는데 $fW(t) = f_{\tau}(t) W(t) - - - - - (2)$ 라 하고 이의 주파수 변환을 $F_W(W)$ 라 하면

$$F_W(W) = \int_{-\tau}^{\tau} W(t)f(t)e^{-iwt} dt \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(y)W(W-y)dy \quad (3)$$

로 표시할 수 있고 $F(W)$ 의 계략치로 사용될 수 있다 또한 창 함수 $W(t)$ 는

$$W(t) = W(-t) : \text{우함수 (even)} \quad (4)$$

$$W(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(w)dw = 1 : \text{정규화} \quad (5)$$

$$W(t) = 0, \quad |t| > \tau : \text{TL 함수} \quad (6)$$

(Time Limited Function)

와 실함수 (Real function) 라는 조건을 만족 하여야 한다.

(2). 지수창 함수와 Chebychev 항등식과의 관계 Chebychev 항등식

$$e^{izs} = J_0(z) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} i^k J_k(z) T_k(s) \quad (7)$$

여기서 $T_k(s)$ 는 Chebychev 다항식으로서

$$T_k(s) = \begin{cases} \cos[k \arccos s], & |s| \leq 1 \\ \cosh[k \operatorname{arccosh} s], & |s| \geq 1 \end{cases} \quad (8)$$

만약 $S = \cos \frac{\pi}{2} t$ 라 하면 $|S| = \cos \frac{\pi}{2} t \leq 1$
 이므로 $T_k(s) = \cos [n \cos^{-1}(\cos \frac{\pi}{2} t)]$
 $= \cos k\pi / 2 t$ ----- (9)

$iz + A$ 라 하면 Bessel Function
 $J_0(Z) = J_0(-iA) = I_0(A)$ ----- (10)
 $i^k J_k(Z) = i^k J_k(-iA) = i^k J_k(jA) = I_k(A)$ ----- (11)

식 (9), (10), (11) 을 식(7)에 대입하면
 $e^{iz+A} = e^{A \cos \frac{\pi}{2} t}$
 $= I_0(A) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} I_k(A) \cos \frac{k\pi}{2} t$ ----- (12)

식 (12)에서 $t=0$ 이면
 $e^A = I_0(A) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} I_k(A)$ ----- (13)
 양변을 e^A 로 나누면

$$1 = \frac{I_0(A)}{e^A} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_k(A)}{e^A}$$
 ----- (14)

식 (14)는 A 의 모든 실수 값에 대하여 항상 성립한다.
 식 (12)에서

$$We(t) = \begin{cases} \frac{e^A \cos \frac{\pi}{2} t}{e^A} & |t| < \tau \\ 0 & |t| > \tau \end{cases}$$
 ----- (15)

이는 TL 함수 (Time Limited function) 는 식
 (14)로 부터 정규화가 됨을 알 수 있으며
 즉 $We(0) = 1$ 또한

$We(t) = We(-t)$ 로서 우함수이다.

$We(t)$ 는 A 의 실수 값에 대하여 실함수이므로
 2점에서 언급한 창함수의 제반 조건을 만족함을 알
 수 있다.

식 (12)와 식 (15)에서

$$We(t) = \frac{e^{A \cos \frac{\pi}{2} t}}{e^A}$$

$$= I_0(A)/e^A + 2 \sum_{k=1}^{\infty} I_k(A)/e^A \cos \frac{k\pi}{2} t$$
 ----- (16)

가 되면
 $a_0 = \frac{b_0}{2} = \frac{I_0(A)}{e^A}, b_k = \frac{2I_k(A)}{e^A}$ ----- (17)

이러 할때 식 (16)은

$$We(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos \frac{k\pi}{2} t$$
 ----- (18)

로 된다. 식 (14)에서
 $a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k = 1$ 이 됨을 알 수 있으나

가 잡아 버린 Hamming 창함수의 일반형

$w_{H1}(t) = \alpha + (1-\alpha) \cos \frac{\pi}{2} t$ 와는 상이하다는 점

에 유의할 필요가 있다. 식 (18) 의 계수 a_0 와

b_k 는 A 의 함수이므로 A 의 변환에 따라 표 1

과 같이 변하며 지수창함수 $We(t)$ 는 여러종류의

창함수가 될 수 있음을 알 수 있다. (그림 1참조)

표 1. 지수창함수의 계수 변환표.

Table 1. The Coefficients of Exponential windows

계수	A=1.3	A=0.8	A=0.6
a	0.400425	0.524149	0.599327
b ₁	0.434595	0.388997	0.344329
b ₂	0.132242	0.075804	0.050892
b ₃	0.027697	0.009975	0.005051
b ₄	0.004409	0.000991	0.000377
b ₅	0.000565	0.000079	0.000023
b ₆	0.000061	0.000005	0.000001
b ₇	0.000006	0.000000	0.000000
b ₈	0.000000	0.000000	0.000000
b ₉	0.000000	0.000000	0.000000
b ₁₀	0.000000	0.000000	0.000000

잡아 버린 창함수는

i) Hamming Window
 $w_{H1}(t) = \begin{cases} 0.54 + 0.46 \cos \frac{\pi}{2} t & |t| < \tau \\ 0 & |t| > \tau \end{cases}$ ----- (19)

ii) Hanning Window
 $w_H(t) = \begin{cases} 0.5 + 0.5 \cos \frac{\pi}{2} t & |t| < \tau \\ 0 & |t| > \tau \end{cases}$ ----- (20)

iii) Parzen Window
 $w_p(t) = \begin{cases} \frac{3}{4} (1 - \sqrt{1 - (\frac{t}{\tau})^2})^2 & |t| < \tau \\ 0 & |t| > \tau \end{cases}$ ----- (21)

한편 식 (15)의 지수창함수와 식 (19), (20), (21)
 의 창함수를 시간영역에서의 응답곡선으로 도시하면
 그림 1과 같다.

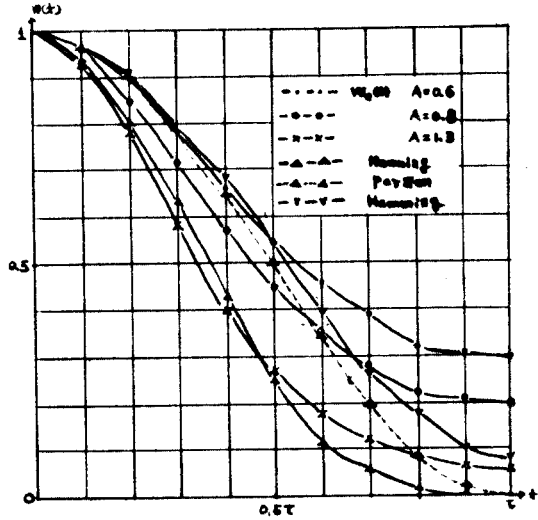


그림 1. 각종 창함수의 시간 응답곡선
 Fig. 1. Time Responses of Various Windows

3. 지수창함수의 주파수 특성

식(18)의 지수창함수 $W_c(t)$ 를 푸리에 변환하면

$$\begin{aligned}
 W_c(\omega) &= \int_{-\tau}^{\tau} w_c(t) e^{-j\omega t} dt \\
 &= \int_{-\tau}^{\tau} (a_0 + \sum_{k=1}^M b_k \cos \frac{\pi k}{\tau} t) e^{-j\omega t} dt \\
 &= a_0 \int_{-\tau}^{\tau} e^{-j\omega t} dt \\
 &+ \sum_{k=1}^M b_k \int_{-\tau}^{\tau} \cos \frac{\pi k}{\tau} t e^{-j\omega t} dt \quad \text{---(22)}
 \end{aligned}$$

식(22) 1항에서

$$a_0 \int_{-\tau}^{\tau} e^{-j\omega t} dt = \frac{2a_0 \sin \omega \tau}{\omega} \quad \text{---(23)}$$

2항에서

$$\begin{aligned}
 &\int_{-\tau}^{\tau} \cos \frac{\pi k}{\tau} t e^{-j\omega t} dt \\
 &= 2 \int_0^{\tau} \cos \frac{\pi k}{\tau} t \cos \omega t dt \\
 &= 2 \int_0^{\tau} \frac{1}{2} [\cos(\frac{\pi k}{\tau} + \omega)t + \cos(\frac{\pi k}{\tau} - \omega)t] dt \\
 &= \frac{\sin(\frac{\pi k}{\tau} + \omega)\tau}{\frac{\pi k}{\tau} + \omega} + \frac{\sin(\frac{\pi k}{\tau} - \omega)\tau}{\frac{\pi k}{\tau} - \omega} \\
 &= \frac{\cos \frac{\pi k}{\tau} \sin \omega \tau}{\frac{\pi k}{\tau} + \omega} - \frac{\cos \frac{\pi k}{\tau} \sin \omega \tau}{\frac{\pi k}{\tau} - \omega} \\
 &= 2(-1)^k \sin \omega \tau \cdot \frac{1}{2} \frac{\cos \frac{\pi k}{\tau} \omega}{\omega^2 - (\frac{\pi k}{\tau})^2} \quad \text{---(24)}
 \end{aligned}$$

식(22)와 식(24)를 식(22)에 대입하여 정리하면 지수창함수의 푸리에 변환은

$$W_c(\omega) = \left\{ \frac{2a_0}{\omega} + 2 \sum_{k=1}^M b_k (-1)^k \frac{\cos \frac{\pi k}{\tau} \omega}{\omega^2 - (\frac{\pi k}{\tau})^2} \right\} \sin \omega \tau \quad \text{---(25)}$$

로서 표시되며 기존 창함수를 주파수 영역에서 그려보면

i) Parzen Window

$$W_p(\omega) = \frac{\pi^2 \sin^2 \omega \tau}{\omega(\pi^2 - \tau^2 \omega^2)} \quad \text{---(26)}$$

ii) Hamming Window

$$W_h(\omega) = \frac{(1.08\pi^2 - 0.16\tau^2 \omega^2) \sin^2 \omega \tau}{\omega(\pi^2 - \tau^2 \omega^2)} \quad \text{---(27)}$$

iii) Parzen Window

$$W_p(\omega) = \frac{3\tau}{4} \left(\frac{\sin \tau \omega / 4}{\tau \omega / 4} \right)^4 \quad \text{---(28)}$$

이들 창함수에 대한 주파수 응답 곡선은 그림2와 같다.

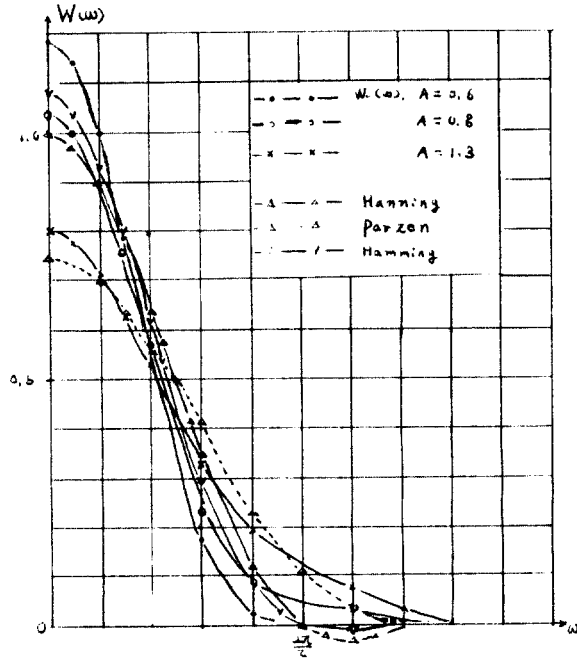


그림 2. 각종 창함수의 주파수 응답곡선

Fig. 2. Frequency Responses of various Windows.

지금까지 아날로그 신호에 따른 분석을 하였으나 디지털 지수창함수로의 변환은 아날로그 지수창함수 $W_c(t)$ 의 구간 τ 를 주기 T 로써 M 회 샘플링했을 경우 즉 $\tau = M/T$, 샘플링 디지털 지수창함수 $W_c(n)$ 는 식(15)로부터

$$W_c(n) = \begin{cases} \frac{a_0 \cos \frac{n}{M} \pi}{a_0 A} & |n| \leq M \\ 0 & |n| > M \end{cases} \quad \text{---(29)}$$

로 쉽게 변경하여 사용할 수 있다.

3. 결론

Chebyshev 항등식으로 부록 유도되는 새로운 지수함수가 창함수의 요건을 만족하고 그 개수의 변동에 따라 여러종류의 창함수가 만들어 질 수 있음

을 보였다. 한편 기존창함수와외 관계를 시간영역
과 주파수 영역에서 비교하여 보았으며, 기존 창함
수와외 유사성을 발견할 수 있었다.

본문에서는 본 창함수에 대한 일반적인 특성소개에
그쳤다.

* 참고 문헌 *

- (1) Athanasios Papoulis, "Signal Analysis"
New York : Mcgraw - Hill, 1977
- (2) R.W.Hamming, "Digital Filters",
New Jersey : Prentice - Hall, Inc., 1977,
- (3) Albert P. Nuttall, "Some Windows with
very Good Sideobe behavior",
IEEE Trans on Acou., Vol. ASSP-29, No.1,
pp. 84 - 90, Feb. 1981.