

제한 조건을 갖는 선형 이산계에서 시간 최적제어의 고찰

CONSIDERATION ON TIME-OPTIMAL CONTROL
OF UNCONSTRAINED LINEAR DISCRETE SYSTEMS

안 두 수 성균관대학교 교수
이 명 규 * 성균관대학교 대학원

상태변수에 제한 조건이 있는 선형 이산계에서 시간 최적제어 문제의 해를 구하기 위해 상태변수의 제한 조건을 쉽게 다룰 수 있는 CUTTING PLANE 기법을 적용하고자 한다.

문제는, 최단 시간에, 다른 상태변수들은 일정하게 유지하면서, 주어진 상태변수를 초기 상태로부터 최종 목적 상태에 이르게 하는 제어입력 $U(t)$ 를 결정하는 것이다.

$$\dot{X} = AX + BU \dots\dots\dots(1)$$

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

$$|U| - 1 \leq 0 \dots\dots\dots(2)$$

$$\dot{X}_1 = A_1 X_1 + A_2 C_2 + B_1 U \dots\dots\dots(3)$$

$$0 = A_3 X_1 + A_4 C_2 + B_2 U \dots\dots\dots(4)$$

여기서 C_2 는 일정하게 유지되도록 고정된 변수이다.

식(4)는 식(2)와 함께 계의 제한 조건이 되므로, 결국 식(1)의 계는 식(3)으로 주어지게 된다.

$$X_1(iT) = \phi_1(T) X_1(i-1) + \phi_2(T) C_2 + \phi_3(T) U \dots\dots(5)$$

단) $\phi_1(T) = \text{EXP}(A_1 T)$

$$\phi_2(T) = \int_0^T \text{EXP}[A_1(T-t)] A_2 dt$$

$$\phi_3(T) = \int_0^T \text{EXP}[A_1(T-t)] B_1 dt$$

$$X_1(kT) = \phi_1(kT) X_0 + \sum_{i=1}^k \phi_1[(i-1)T] \phi_2(T) C$$

$$+ \sum_{i=1}^k \phi_1[(k-i)T] \phi_3(T) U(iT) \dots\dots\dots(6)$$

$$\sum_{i=1}^k \phi_1(-iT) \phi_2(T) C + \sum_{i=1}^k \phi_1(-iT) \phi_3(T) U(iT)$$

$$= \phi_1(-kT) X(kT) - X_0 \dots\dots\dots(7)$$

일반적으로 최종 목적 상태를, 상태공간에서, 원점으로 생각할 수 있다.

만일 k 번째 샘플링(SAMPLING) 구간에서 목적 상태에 도달했다고 하면 $X(kT) = X_f = 0$ 으로 되어 식(7)은 다음과 같이 된다.

$$\sum_{i=1}^k \phi_1(-iT) \phi_2(T) C + \sum_{i=1}^k \phi_1(-iT) \phi_3(T) U(iT)$$

$$= -X_0 \dots\dots\dots(8)$$

상태변수의 제한 조건을 $DX \leq e$ 라고 하면 이 식은 식(6)에 의해 다음으로 표시된다.

$$D \sum_{i=1}^k \phi_1(j-i)T \phi_2(T) C + \sum_{i=1}^j \phi_1[(j-i)T] \phi_3(T) U(iT)$$

$$\leq e - D \phi_1(jT) X_0 \dots\dots\dots(9)$$

결국 문제는 (2), (8), (9)를 만족하는 k 의 최소 값을 구하는 것이다. 먼저 (2)와 (8)에 의해 규정되는 간단한 문제를 풀고 이어서 상태변수의 제한 조건을 어기는 것에 대하여 다룬다.

CUTTING PLANE 알고리즘을 간단히 설명하여 보면, 먼저 상태변수에 제한 조건이 없는 문제를 REVISED SIMPLEX METHOD로 풀고 그 때 나타나는 꺾어진 제한 조건을

참 고 문 헌

어기게 되면 그 때의 정보를 바탕으로 그 부분을 잘라내도록 하는 새로운 제한 조건을 형성하고 그때의 하는 부속당한 것으로 간주한다. 해가 모든 제한 조건을 만족시킬 때까지 이러한 과정을 반복한다.

본 논문에서는 상태변수에 제한을 갖는 선형 이산계에서 시간 최적제어 문제의 해를 구하기 위해 제한 조건을 쉽게 다룰 수 있는 CUTTING PLANE 기법을 적용 최적해를 구하는 방법을 보였다.

- 1) M.J.P.SCOTT & DICKIE, TIME OPTIMAL CONTROL OF STATE CONSTRAINED LINEAR DISCRETE SYSTEMS, 117-127, 1978
- 2) N.K.NICHOLS, TIME OPTIMAL DECOUPLING CONTROL PROBLEMS, INT.J.CONTROL, 35, 5, 849-871 1982
- 3) BASHEIN, G. A SIMPLEX ALGORITHM FOR ON-LINE COMPUTATION OF TIME OPTIMAL CONTROLS, IEEE TRANS.AC-16, 479-482, 1971
- 4) KAPUR, K.C. & VAN SLYKE, R.M. CUTTING PLANE ALGORITHMS & STATE CONSTRAINED LINEAR OPTIMAL CONTROL PROBLEMS, J.COMP.SYS.SCI. 4, 570-605, 1970
- 5) G.HADLEY, LINEAR PROGRAMMING, ADDISON-WESLEY 1962, CH. 7 CH. 11