이산시간 비최소위상 시스템의 직접 적응 극 배치 및 안정도에 관한 연구

Direct Adaptive Pole Placement and Stability of Discrete-time Non-minimum Phase Systems

최 종 호* 서울 대학교 공과대학

최 진 영 제어계측공학과

1. 서론

기준모델 적응제어(MRAC)중에서 주어진 적응 법칙이 안정하고 적응제어기를 포함한 시스템의 전체 전달함수와 출력이 모델의 전달함수와 출력을 따라 갈 수 있다고 보인 많은 논문이 있는데 대부분이 [1]-[4] 플랜트가 최소위상이어야 한다는 조건이 있다. 최소위상이란 전달함수중 분자의 근이 모두 안정한 영역에 있어야 한다는 것이다. 그러나 모르는 시스템을 제어하는데 있어서 최소위상인지 아닌지를 안다는 것은 큰 제약이다. 이러한 제약조건에 대해 Astrom [5]이 비최소위상 시스템에 대해 직접 극 배치 방법을 제시했는데 비최소 위상 시스템의 영점의 갯수를 미리 알아야 한다는 조건이 있어 또한 제약이 된다. 이에 대해 최근 Elliot [6]가 연속시간 비최소위상 시스템에 대해 기준입력의 주파수 성분이 충분히 많을 때 이 시스템이 원하는 위치에 분모의 근(pole)을 위치하게 하는 방법을 제시하였으나 그 방법이 안정하다는 증명을 하지는 못했다.

이 논문에서는 이산시간 비최소위상 시스템에 대해서 Elliot [6]가 제시한 방법을 따르면 기준입력의 주파수 성분이 충분히 많은 경우에는 원하는 위치에 극을 배치시킬 수 있고 기준입력의 주파수 성분이 충분히 많지 않은 경우에도 전체 시스템이 안정하다는 것을 증명한다.

2. 문제의 정의

이산시간 비최소위상 시스템이

$$p(z)y(k)=r(z)u(k) \tag{1}$$

로 주어진다. 여기서 $y(k)$와 $u(k)$는 플랜트의 출력과 입력이고 $p(z)$와 $r(z)$는 서로 소이며 차수는 n과 $m(n\geq m)$이고 $p(z)$는 최고차 계수가 1인 다항식이다. 임의의 n차 안정 다항 식 $q(z)$을 정의하고 다음의 제어기를 구성한다.

$$\begin{aligned} q(z)v(k)&=a^*(z)y(k)+b^*(z)u(k) \\ u(k)&=v(k)+u_r(k) \end{aligned} \tag{2}$$

여기서 $u_r(k)$는 유한한 기준입력이고 $a^*(z)$, $b^*(z)$는 다음 형태의 $(n-1)$차 다항식이다.

$$\begin{aligned} a^*(z)&=\sum_{i=0}^{n-1} a_i^* z^i \\ b^*(z)&=\sum_{i=0}^{n-1} b_i^* z^i \end{aligned} \tag{3}$$

(2)의 제어기를 포함한 폐 제어시스템은

$$\begin{aligned} (q(z)p(z)-a^*(z)r(z)-b^*(z)p(z))s(k)&=q(z)u_r(k) \\ y(k)&=r(z)s(k) \end{aligned} \tag{4}$$

이 되는데 (4)의 시스템의 전달함수의 분모가 원하는 안정다항식 $p_d(z)$가 되도록 $a^*(z)$, $b^*(z)$을 구하면 된다. 따라서 식

$$a^*(z)r(z)+b^*(z)p(z)=q(z)(p(z)-p_d(z)) \tag{5}$$

에서 $p(z)$와 $r(z)$이 서로 소이면 유일한 $a^*(z)$, $b^*(z)$이 존재한다. 그러면 전체 전달함수는

$$\begin{aligned} T_d(z)&=q(z)r(z)/(q(z)p(z)-a^*(z)r(z)-b^*(z)p(z)) \\ &=r(z)q(z)/p_d(z)q(z)=r(z)/p_d(z) \end{aligned} \tag{6}$$

이 된다. 그런데 $p(z)$와 $r(z)$를 알면 (5)식으로부터 $a^*(z)$와 $b^*(z)$를 구할 수 있으나 모르는 경우에는 Bezout Identity를 적용하여 제어할 수 있다. $y(k)$ 와 $u(k)$로 부터

$$\begin{aligned} q(z)\tilde{y}(k)&=y(k), \quad \tilde{y}_i(k)=z^i\tilde{y}(k), \quad 0\leq i\leq n-1 \\ q(z)\tilde{u}(k)&=u(k), \quad \tilde{u}_i(k)=z^i\tilde{u}(k), \quad 0\leq i\leq n-1 \end{aligned} \tag{7}$$

$$u(k)=\sum_{i=0}^{n-1}\left[a_i(k)\tilde{y}_i(k)+b_i(k)\tilde{u}_i(k)\right]+u_r(k) \qquad (8)$$

위와 같이 제어기를 구성하고 $a_i(k)$와 $b_i(k)$는 $k\to\infty$에 따라 (5)을 만족하는 a_i^*와 b_i^*로 수렴하도록 제어계수 $a_i(k)$와 $b_i(k)$를 추정한다. 그런데 $p(z)$, $r(z)$가 서로 소이면 Bezout Identity

$$c^*(z)r(z)+d^*(z)p(z)=1 \qquad (9)$$

,여기서 $c^*(z)=\sum_{i=0}^{n-1} c_i^* z^i$, $d^*(z)=\sum_{i=0}^{n-1} d_i^* z^i$, 를 만족하는 $c^*(z)$와 $d^*(z)$가 유일하게 존재한다. (9)식을 (5)식에 적용하면

$$a^*(z)r(z)+b^*(z)p(z) =q(z)\left[p(z)-(c^*(z)r(z)+d^*(z)p(z))\,p_d(z)\right] \qquad (10)$$

이 되는데 $u(k)$와 $y(k)$를 3n차 안정다항식 $f(z)$을 통해 얻은 상태벡터로 부터 a^*, b^*, c^*와 d^*를 직접 추정할 수 있으며 a^*, b^*를 제어기 구성에 사용한다. $\bar{u}(k)$, $\bar{y}(k)$와 $\bar{s}(k)$를

$$f(z)\bar{u}(k)=u(k),\quad \bar{u}_i(k)=z^i\bar{u}(k),\quad 0\le i\le 3n-1$$
$$f(z)\bar{y}(k)=y(k),\quad \bar{y}_i(k)=z^i\bar{y}(k),\quad 0\le i\le 3n-1 \qquad (11)$$
$$f(z)\bar{s}(k)=s(k)$$

로 정의하면 (1)과 (11)로 부터

$$p(z)\bar{s}(k)=\bar{u}(k)+\varepsilon_1$$
$$\bar{y}(k)=r(z)\bar{s}(k)+\varepsilon_2 \qquad (12)$$

이 되는데 ε_1와 ε_2는 지수함수적으로 감소하는 항이다. (10)식에 $\bar{s}(k)$를 곱하고 (12)를 이용하면

$$a^*(z)\bar{y}(k)+b^*(z)\bar{u}(k)=q(z)\bar{u}(k)-c^*(z)q(z)p_d(z)\bar{y}(k)-d^*(z)q(z)p_d(z)\bar{u}(k)+\varepsilon_3 \qquad (13)$$

이 되는데 추정할 계수 θ^*와 벡터 $\bar{x}(k)$를

$$\theta_{ab}^{*T}=\left[a_0^*,\dots,a_{n-1}^*,\ b_0^*,\dots,b_{n-1}^*\right]$$
$$\theta^{*T}=\left[a_0^*,\dots,a_{n-1}^*,\ b_0^*,\dots,b_{n-1}^*,\ c_0^*,\dots,c_{n-1}^*,\ d_0^*,\dots,d_{n-1}^*\right] \qquad (14)$$

$$\bar{x}^T(k)=\frac{1}{f(z)}\left[(1,z,..,z^{n-1})y(k),(1,z,..,z^{n-1})u(k),(1,z,..,z^{n-1})q(z)p_d(z)y(k),(1,z,..,z^{n-1})q(z)p_d(z)u(k)\right] \qquad (15)$$

로 정의하면 (13)식은

$$\theta^{*T}\bar{x}(k)=q(z)\bar{u}(k)+\varepsilon_3 \qquad (16)$$

로 나타낼 수 있어 θ^*를 추정할 수 있다.

제어시스템을 상태변수로 나타내면

플랜트: $x(k+1)=Ax(k)+bu(k)$

$$y(k)=c^Tx(k) \qquad (17)$$

제어기:
$$w(k+1)=\begin{bmatrix} w_1(k+1)\\ w_2(k+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} Q & 0\\ Q & 0\end{bmatrix}w(k)+\begin{bmatrix} g & 0\\ g & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} y(k)\\ u(k)\end{bmatrix}$$
$$v(k)=\theta_{ab}^T(k)w(k) \qquad (18)$$
$$u(k)=v(k)+u_r(k)$$

가 되며 $\det(zI-Q)=q(z)$이다.

여기서 $\phi_{ab}(k)=\theta_{ab}(k)-\theta_{ab}^*$, $\zeta^T(k)=[x^T(k),w_1^T(k),w_2^T(k)]$로 정의하면

$$\zeta(k+1)=\begin{bmatrix} -A & b\theta_1^* & b\theta_2^{*T}\\ gc^T & Q & 0\\ 0 & g\theta_1^{*T} & Q+g\theta_2^{*T}\end{bmatrix}\zeta(k)+\begin{bmatrix} b\\ 0\\ g\end{bmatrix}\phi_{ab}(k)^Tw(k)+u_r(k)$$
$$=\bar{A}\zeta(k)+\bar{b}\,\phi^T(k)w(k)+u_r(k) \qquad (19)$$
$$y(k)=[c^T,\ 0,\ 0]\zeta(k)=\bar{c}^T\zeta(k)$$

이 되어 $\bar{A}$는 안정행렬이고 $\bar{c}^T(zI-\bar{A})\bar{b}=r(z)/p_d(z)$가 된다.

3. 계수 추정방법 및 안정도 증명

식별오차 $\varepsilon(k)$는 (16)식으로 부터

$$\varepsilon(k)=q(z)\bar{u}(k)-\theta^T(k)\bar{x}(k) \qquad (20)$$

이 되고, $\theta(k)\to\theta^*$가 되면 (16)식을 만족한다. 이에 대해 목적함수를

$$E(\theta,k)=\sum_{j=0}^{k}\left[q(z)\bar{u}(j)-\bar{x}^T(j)\theta\right]^2 \qquad (21)$$

로 하고 이 목적함수를 최소로 하는 θ를 $\hat{\theta}(k)$로 나타내면

$$\hat{\theta}(k)=\left[\sum_{j=0}^{k}\bar{x}(j)\bar{x}^T(j)\right]^{-1}\sum_{j=0}^{k}q(z)\bar{u}(j)\bar{x}(j) \qquad (22)$$

이 되는데 이것의 recursive 형태는 아래와 같다.

$$\hat{\theta}(k)=\hat{\theta}(k-1)+A(k)\left[q(z)\bar{u}(k)-\bar{x}^T(k)\hat{\theta}(k)\right] \qquad (23)$$

$$A(k)=P(k-1)\bar{x}(k)/\left[1+\bar{x}^T(k)P(k-1)\bar{x}(k)\right] \qquad (24)$$

$$P(k)=P(k-1)-P(k-1)\bar{x}(k)\bar{x}^T(k)P(k-1)/\left[1+\bar{x}^T(k)P(k-1)\bar{x}(k)\right] \qquad (25)$$

위의 방법에 대한 계수의 수렴성은 정리1에 의해 보여진다.

정리1: 미지의 비최소위상 시스템에 대해서 $P(0)^{-1}$를 임의의 nonsingular 행렬로 주어 졌을 때 다음이 성립한다.

i) $\|\hat{\theta}(k)-\theta^*\| \le k_1 \|\hat{\theta}(0)-\theta^*\|$ (26)

여기서, $k_1^2=\lambda_{max}(P(0)^{-1})/\lambda_{min}(P(0)^{-1})$

ii) $\lim_{k\to\infty}\hat{\theta}(k)=\theta_c$ (constant) (27)

iii) $\lim_{k\to\infty}\delta(k)=\lim_{k\to\infty}\phi^T(k)\bar{x}(k)=0$ (28)

여기서, $\phi^T(k)=\hat{\theta}(k)-\theta^*$

iv) u(k)의 주파수 성분이 충분히 많으면

$\lim_{k\to\infty}\hat{\theta}(k)=\theta^*$ □ (29)

이산시간 비최소위상 시스템에서 위의 방법에 의해 제어계수가 추정되고 이로부터 u(k)가

$$u(k)=\hat{\theta}^T(k)w(k)+u_r(k) \quad (30)$$

로서 구해져 제어할때 전체 시스템이 $u_r(k)$의 주파수 성분에 관계없이 안정됨을 보일수가 있는데 u(k)의 주파수 성분이 충분할때의 안정도에 대해서는 정리2에 의해 보여진다.

정리2: u(k)가 주파수 성분이 충분하여 $\hat{\theta}(k)$가 θ^*로 수렴하여 (30)에 의해 제어될때 전체 시스템의 모든 상태벡터는 평등하게 유한하다. □

지금까지는 플랜트에 들어가는 입력 u(k)에 대한 전체 시스템의 안정도를 살펴 보았는데 이 결과를 사용하여 기준 입력 $u_r(k)$에 대한 시스템의 안정도에 대해서 정리3에 의해 보여진다.

정리3: $u_r(k)$의 주파수 성분이 충분히 많고 평등하게 유한하면 $\hat{\theta}(k)$는 θ^*로 수렴하며 $u_r(k)$의 주파수 성분이 충분하지 않은 경우에도 전체 시스템의 모든 상태 벡터는 평등하게 유한하다.□

증명: u(k)의 주파수 성분에 관계없이 정리1에 의해 $\hat{\theta}(k)$ θ_c로 되므로 이때의 a(z), b(z), c(z), d(z)가 $a_c(z)$, $b_c(z)$, $c_c(z)$, $d_c(z)$로 수렴한다. 이때의 $u_r(k)$과 u(k) 간의 관계를 살펴보면

$$u(k)=[q(z)p(z)/p_c(z)]u_r(k) \quad (31)$$

$$p_c(z)=q(z)p(z)-b_c(z)p(z)-a_c(z)r(z)$$

이 된다. 따라서 $u_r(k)$의 주파수 성분이 충분히 많으면 u(k)의 주파수 성분도 충분히 많으므로 정리1, 정리2에 의해 $\hat{\theta}(k)$는 θ^*로 수렴하고 전체 시스템의 모든 상태 벡터는 평등하게 유한하다. 그러나 $u_r(k)$의 주파수 성분이 충분하지 못할때 u(k)의 주파수 성분이 충분하지 못해서 $p_c(z)$이 불안정한 근을 갖고 있다면 일반적으로 u(k)는 발산하게 되어 u(k)의 주파수 성분이 충분하게 되어 $\hat{\theta}(k)$는 θ^*로 수렴하므로 모순이다. 따라서 일반적으로는 $p_c(z)$이 안정다항식이 되어 모든 상태 벡터는 평등하게 유한하나 $p_c(z)$이 불안정한 근을 갖고 있어도 u(k)가 발산하지 않을 수 있는데 이 경우는 $p_c(z)$의 불안정한 근이 $Z[u_r(k)]$의 영점에 의해 상쇄되는 경우이다. 또한 이때의 y(k) 와 $u_r(k)$의 관계식은

$$y(k)=[q(z)r(z)/p_c(z)]u_r(z) \quad (32)$$

인데 여기서도 마찬가지로 극-영점이 상쇄되므로 y(k)는 평등하게 유한하고 따라서 모든 상태벡터는 평등하게 유한하다. □

위의 정리에 의해 이산시간 비최소위상 시스템이 임의의 유한한 기준입력에 의해 안정되고 주파수 성분이 충분한 기준입력에 의해서는 원하는 극 배치가 이루어짐을 보였다.

4. 결론

이산시간 비최소위상 시스템의 적응 극 배치에 있어서 기준입력의 주파수 성분이 충분하면 정확한 극 배치가 이루어지고 주파수 성분이 충분하지 못할 경우에도 전체 시스템이 안정하게 되는것을 보였다. 이에 대한 시뮬레이션을 행하였는데 좋은 결과를 얻었다. 계수 측정방법에서 가중치 최소자승법으로도 증명이 가능하며 더 빠른 수렴 결과를 가져오리라 예상된다.

5. 참고문헌

[1] K.S.Narendra and L.S.Valavani, "Stable Adaptive Controller Design-Direct Control", IEEE Trans., Auto. Contr., Vol.AC-23, pp.570-582, Aug., 1978.

[2] K.S.Narendra, Y.H.Lin, and L.S.Valavani, "Stable Adaptive Controller Design, part II: Proof of Stability", IEEE Trans., Auto. Contr., Vol.AC-25, pp.440-448, June 1980.

[3] K.S.Narendra and Y.H.Lin, "Stable Adaptive Control", IEEE Trans. Auto. Contr., Vol. AC-25, No.3, pp.456-461, June 1980.

[4] G.Kreisselmeier and D.Joos, "Rate of Convergence in Model Reference Adaptive Control", IEEE Trans Auto. Contr., Vol.AC-27, pp.710-713, June, 1982.

[5] K.J.Astrom, "Direct Methods for non-minimum phase systems", IEEE Trans., Auto. Contr., Vol.AC-27, pp.419-426, Dec. 1980.

[6] H.Elliot, "Direct Adaptive Pole Placement with Application to non-minimum phase Systems", IEEE Trans. Auto. Contr., Vol.AC-27, pp.720-722, June, 1982.