

정 언 교\*  
이 기 식  
한 송 업

서울대학교  
전기공학과

1. 서론

전원으로부터 먼 곳에 경계를 잡아야 하는 자장 문제 계산에 기존 유한요소법을 사용하면 많은 컴퓨터 기억용량과 많은 계산시간이 소요된다. 특히 3차원 문제에 있어서는 시스템 매트릭스의 차원이 아주 커지기 때문에 위와 같은 문제는 더욱 중요시 된다.

이와 같은 문제점들을 해결하기 위해서 2차원 자장 문제를 푸는데 있어서 무한요소법이 제시된 바 있다. (1) (2) 이 방법에서는 전 계산영역을 두 영역, 즉 기존 유한요소법을 사용하는 유한요소영역과 고유함수 (eigenfunction) 를 이용하는 무한요소영역으로 나누게 된다. 그리고 두 영역의 공유 경계에서는 포텐셜의 연속조건을 콜로케이션법 (collocation) 을 사용하여 다루었다. (3)

본 연구에서는 무한요소법을 3차원 자장계산에 확장하여 적용시킨다. 이 경우에서는 두 영역의 공유 경계 면에서 포텐셜의 연속조건과 포텐셜의 수직방향 도함수 연속, 두 조건이 모두 만족될 수 있도록 콜로케이션법을 적용시킨다.

2. 이론

기본 방정식

전 계산영역 R 을 두 영역, 즉 유한요소 영역 R<sub>1</sub> 과 무한요소영역 R<sub>2</sub>, 그리고 공유경계면 S 로 나눈다. 두 영역에서의 스칼라 포텐셜을 각각  $\phi_1$  과  $\phi_2$  라면 영역 R<sub>1</sub> 과 R<sub>2</sub> 에서의 편미분 방정식은 각각 다음과 같이 주어진다. (4)

$$\nabla \cdot (\mu_1 \nabla \phi_1) = \nabla \cdot (\mu_1 \vec{H}_s) \quad (1)$$

$$\nabla \cdot (\mu_2 \nabla \phi_2) = 0 \quad (2)$$

여기서  $\mu$  는 무사율이고  $\vec{H}_s$  는  $\mu = \mu_0$  인 영역에서의 자장세기 벡터이다.

두 영역의 공유경계면에서의 경계조건은 면 S 위에서

$$\phi_1 = \phi_2 \quad (3)$$

$$\phi_{1n} = \phi_{2n} \quad (4)$$

여기서 수직벡터  $\phi_{1n}$  과  $\phi_{2n}$  의 방향은 각영역으로부터 바깥쪽으로도 취한다.

영역 R<sub>1</sub> 은 다시 유한개의 요소로 나누며 각 요소에서의 포텐셜은 다음과 같이 보간함수로 표시된다.

$$\phi_1 = \sum_{i=1}^n N_i(x, y, z) \phi_i \quad (5)$$

$N_i$  와  $\phi_i$  는 각각 점점에서 보간함수와 포텐셜을 나타낸다. 영역 R<sub>2</sub> 에서도 역시 포텐셜을 유한개의 고유함수  $U_j$  들을 사용하여 근사적으로 나타낸다.

$$\phi_2 = \sum_{j=1}^m C_j U_j(x, y, z) \quad (6)$$

여기서  $C_j$  는 전개상수이다.

콜로케이션법

콜로케이션법을 사용하여 전개상수  $C_j$  들 공유 경계면에 있는 정점의 포텐셜로써 나타낼 수 있다. 하나의 콜로케이션점  $S_k$  에서 식 (3), (4) 의 경계조건에 의해 다음과 같은 관계식이 주어진다.

$$\sum_{i=1}^n U_j(S_k) C_j = \sum_{i=1}^n N_i(S_k) \phi_i \quad (7)$$

$$\sum_{j=1}^m U_{jn}(S_k) C_j = \sum_{i=1}^n N_{in}(S_k) \phi_i \quad (8)$$

$U_{jn}$  과  $N_{in}$  은 공유경계면에서 각각  $U_j$  와  $N_i$  의 수직방향 도함수이다.

위와 같은 절차를 공유경계면위의 모든클로케이  
스점들에 적용하여 조합하면

$$\sum_{j=1}^N C_j \phi_j = \sum_{i=1}^N g_{ij} \phi_i, \quad i=1, 2, \dots, N \quad (9)$$

와 같은 식을 얻을 수 있다. 여기서  $N$  은 모든클로  
케이선 점들의 개수이며  $N$  은 공유경계면상의  
정점의 개수이다. 식(9)를 최소제곱법을 사용하여  
플래너 전계상수  $C_j$  는

$$C_j = \sum_{i=1}^N b_{ij} \phi_i, \quad j=1, 2, \dots, m \quad (10)$$

로 된다.

### 변분법

식(7), (2)로 표시된 자장 문제에 변분법을 적용  
하면 범함수가 다음과 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \Pi = & \int_{R_1} \left\{ \frac{1}{2} \mu_1 (\nabla \Phi_1)^2 - \mu_1 \vec{H}_0 \cdot \nabla \Phi_1 \right\} dv \\ & + \int_{R_2} \left\{ \frac{1}{2} \mu_2 (\nabla \Phi_2)^2 - \mu_2 \vec{H}_0 \cdot \nabla \Phi_2 \right\} dv \quad (11) \end{aligned}$$

식(5)와 (6)을 식(11)에 대입하고 식(10)으로 표시  
된 전계상수  $C_j$  를 대입한 후 각 정점 포텐셜에대  
한 최소화 과정에서

$$\sum_{i=1}^N S_{ij} \Phi_j = f_i, \quad j=1, 2, \dots, n \quad (12)$$

와 같은 시스템 방정식이 얻어진다.

### 3. 계산에

자장계산 에로써, 윗방법을 일점자계속에 있는  
속이 빈 구체에 적용시켜 보았다. 이 모델에서  
대칭성을 고려하여 1/8 공간에서만 자장계산을 했  
다. 이때 사용한 기본요소는 극면으로 된 20-점  
육면체 요소이며, 보간함수는 2차이다. [5]

유한요소영역은 9개의 기본요소들로 나누어졌으며

이중 16개는 공유경계면 위에 있다. 그리고  
무한요소영역에서의 스칼라 포텐셜은

$$\Phi_2 = C \frac{\cos \theta}{r^2} \quad (13)$$

으로 주어진다.

그림1과 그림2에, 임의로 경계를 설정한 유한요  
소법을 사용한 결과와 위에 제시한 방법을 사용하  
여 얻은 결과들이 비교되어 있다.

무한요소법에 의한 결과가 더 정확한 것을 알 수  
있다.

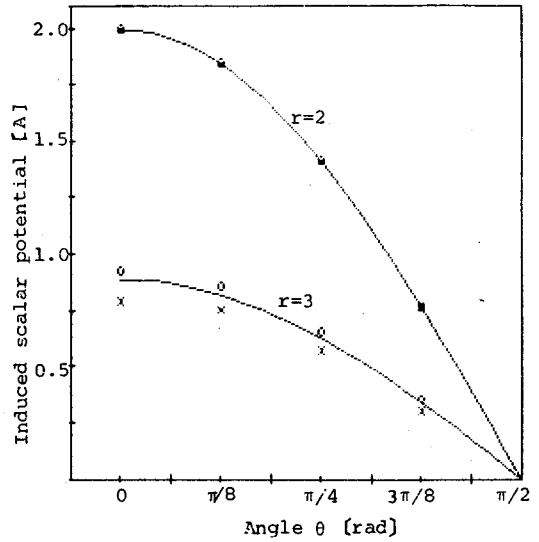


그림 1. 각도에 대한 포텐셜

- 해석적인 해
- 무한요소법 해
- x 유한요소법 해

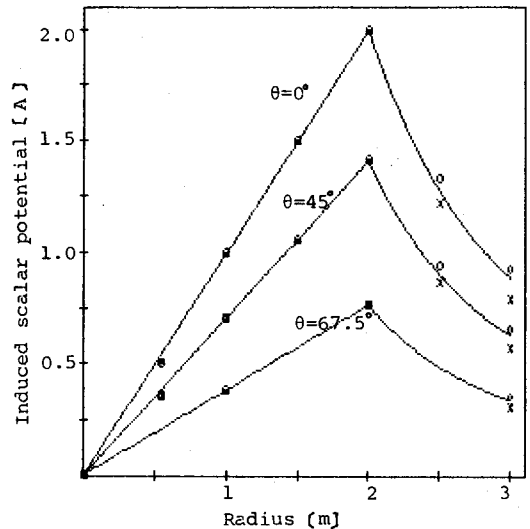


그림 2. 반경에 대한 포텐셜

- 해석적인 해
- 무한요소법 해
- x 유한요소법 해

#### 4. 결론

본 연구에서는 무한요소법을 3차원 자장문제에 적용하였는데 포텐셜 계산에 있어서 기존 유한요소법보다 정확한 결과를 얻을 수 있었으며 특히 요소수가 많다는 3차원 문제의 특수성 때문에 시스템 매트릭스를 구성하는 데 소요되는 시간을 많이 절약할 수 있다.

#### 5. 참고 문헌

- [1] A.Trkov and W.L.Wood, "Comparison between a finite element method for a three-dimensional potential problem," I.J.N.M.E., Vol.15, 1980, pp.1083-1094.
- [2] In-ho Kim, Hyun-kyo Jung, Gi-shik Lee, and Song-yop Hahn, "Magnetic field computations by infinite elements," J.Appl. phys., Vol.53, 1982, pp.8372-8374.
- [3] A.J.Davies, The Finite Element Method, Oxford : Clarendon press, 1980.
- [4] O.C.Zienkiewicz, John Lyness, and D.R.J. Owen. "Three-dimensional magnetic field determination using a scalar potential-A finite element solution," IEEE Transactions on Magnetics, Vol. may-13, No.5, 1977, pp. 1649-1656.
- [5] O.C.Zienkiewicz, The Finite Element Method, England : McGraw-Hill, 1977.