유한 요소법에 의한 확산 방정식의 수치해석(1)

Numerical Solution of Dispersion Equation by the Finite Element Method (1)

부산 대학교 양 윤모
울산 공과대학 김 성득

1 서론

1960년도 이후 환경 위생 및 공해 문제 등의 중요성이 점차로 절실하게 인식되어짐에 따라 오염 물질의 확산 현상에 관한 연구도 상당한 활기를 보이고 있다. 일반적으로 이것들에 관한 연구는 최근 까지도 拡散(diffusion) 혹은 分散(dispersion)에 관한 係數들의 실험적 연구나 실험에의한 통계적 처리로

부터 그 농도 분포를 예측 할려는 수법을 취해왔다.

최근 computer의 확대 보급에 따라 解析的 解(analytical sol.)를 구하는 것이 거의 불가능한 방정식 들도 數値的(numerical method)으로 그 해석이 가능하게 되어 감에따라 본 연구자 들도 잘 알려진 强混合型 확산 방정식을 유한요소법을 이용하여 수치적으로 해석해 보았다.

확산 방정식에 나타나는 모든 변수들 중에 농도만 미지수이고 기타 계수 들이나 수심, 유속 등은 주어진 값을 사용한다. 특히 定常상태의 흐름(steady state flow)인 경우는 그 유속을 계산하는 수법이 이미 소개되어 있는것을 본 연구의 program 중 subroutine 에 포함시켰으나 不定流(unsteady flow)에 대한 이차원 場에서의 유속은 본 내용에 포함시키지 않는다.

.2 기본 방정식

연직 방향으로 적분을 취한 이차원 場에서의 유체 유동에 따른 농도 (concent-ration)나 온도 분포를 나타내는 기본 방정식은 일반적으로 다음과 같이 유도되어 진다.

$$\rho\theta\left\{h\frac{\partial c}{\partial t} + h V_i \frac{\partial c}{\partial x_i}\right\} = F - \alpha h c - \Sigma Q_j \Delta_j + \rho\theta \frac{\partial}{\partial x_i}\left[h D_i \frac{\partial c}{\partial x_i}\right], \quad i=1,2$$

여기서

ρ ; 밀도

θ ; 열 확산 문제에서는 비열, 질량 전달에서는 $\theta = 1$

h ; 수심

D_i ; i 방향에 대한 分散계수 (dispersion coefficient)

$\alpha = h\beta$; 감쇄계수 (decay coefficient)

ΣQ_j ; point source 의 합계

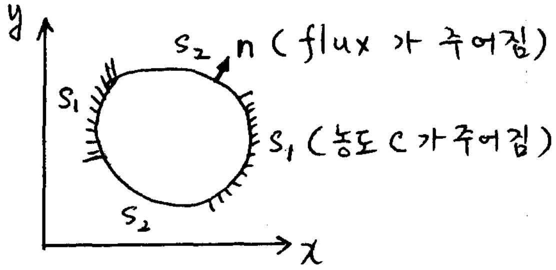
$F = \rho f h$; distributed sink

C; 농도 또는 온도

상기 방정식 중에서 분산계수 D_i는 보통 분자 확산계수 (molecular diffusivity coefficient)와 난류 확산계수 (eddy diffusion coefficient)의 합으로 나타나는데 일반적으로 분자 확산계수는 난류 확산계수에 비하면 무시할 만하다. 난류 확산 계수의 결정은 지금까지 많은 연구자 들에 의하여 경험적 혹은 실험적으로 얻어진 값을 사용한다. 감쇄 계수 α의 값은 생물학적 혹은 화학적 반응 등과 관계되는 상수이며 각 절점에서의 유속 성분 V_i는 정상 상태 (steady state)에 대해서만 고려한다.

3 경계 조건의 설정

상기 기본 방정식을 풀기 위하여 아래 그림과 같은 경계조건을 준다.



경계 S_1 상에는 농도 또는 온도의 값 c 가 주어지며 경계 S_2 상에는 normal flux 의 값 $\bar{q}_n = \alpha_{ni} q_i$ 가 주어지고 전체 경계 S 는 $S = S_1 + S_2$ 이다.

4 Variational Statement

기본 방정식을 경계조건에 유의하면서 Galerkin's form 으로 나타내고 이를 부분적분하면 다음과 같은 식으로 주어진다.

$$\iint \Big\{ \rho\theta \Big[h\frac{\partial c}{\partial t} + hu\frac{\partial c}{\partial x} + hv\frac{\partial c}{\partial y} \Big] \delta c + \rho\theta h D_x \frac{\partial c}{\partial x}\frac{\partial \delta c}{\partial x} + \rho c h D_y \frac{\partial c}{\partial y}\frac{\partial \delta c}{\partial y} - F\delta c + \alpha h c \delta c + \Sigma Q_j \Delta_j \delta c \Big\} dx dy + \int_{S_2} h \bar{q}_n \delta c \, ds = 0$$

여기서 $c = \bar{c}$ on S_1

5 Finite Element Formulation

미지수 C를 보간함수 ϕ와 절점 값 C^n으로 나타내면

$$C = \phi^T C^n$$

이며 그 미분 값은 다음과 같다.

$$\frac{\partial C}{\partial x} = C_{,x} = \phi_{,x}^T C^n \quad , \quad \frac{\partial C}{\partial y} = C_{,y} = \phi_{,y}^T C^n$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \dot{C} = \phi^T \dot{C}^n$$

여기서 보간 함수 ϕ는 2차의 삼각형 면적 함수로 취하고 적분 공식을 사용하여 적분한다.

위의 값들을 Gallerkin의 변분방정식에 대입하여 정리하면

$$M\dot{C}^n + AC^n + KC^n + BC^n = P$$

를 얻는다. 여기서

$$M = \iint \rho\theta h \phi\phi^T dA$$

$$K = \iint \{\rho\theta h[D_x \phi_{,x} \phi_{,x}^T + D_y \phi_{,y} \phi_{,y}^T]\} dA$$

$$A = \iint \rho \theta h [u \phi \phi_{,x}^T + v \phi \phi_{,y}^T] dA$$

$$B = \iint \alpha h \phi \phi^T dA$$

$$P = \iint F_1 \phi dA + \iint h F_2 \phi dA - \int_{S_2} h \bar{q}_n \phi ds - \sum_j Q_j \phi \Delta_j$$

여기서 $F = F_1 + hF_2$

6 System Matrices

각 요소 matrix 들을 assemble 하여 전 영역에서의 평형 방정식을 만들고 경계조건을 고려해 주면 다음과 같은 형태의 식을 얻는다.

$$M\dot{C} + AC + KC = P$$

여기서 M, A, K, P 는 global system 의 matrix 이며 C 는 각 절점에서의 미지 vector 들이다.

7 시간 적분

시간 적분은 trapezoidal rule을 사용하며

$$\dot{C} = \frac{C_t - C_o}{\Delta t} \quad , \quad C = \frac{C_t + C_o}{2} , \; P = \frac{P_t + P_o}{2}$$

을 global system matrix equation에 대입하면 다음과 같다.

$$\left[\frac{2}{\Delta t} M + A + K + B \right] C_t = \left[\frac{2}{\Delta t} M - A - K - B \right] C_o + P_t + P_o$$

즉 $\quad M^* C_t = F^*$

좋은 결과를 얻기 위한 최대 시간 간격 Δt는 일반적으로 격자 간격의 함수로 주어지는데 그 관계는 경험에 의하여 일반적으로 다음과 같이 주어지나 문제에 따라서 약간 조정하면서 사용한다.

$$D \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} < \frac{1}{5} \quad , \quad V \frac{\Delta t}{\Delta x} < \frac{1}{5}$$

8. 例題

본 논문에 소개한다.